Επαναληπτικό Διαγώνισμα Μαθηματικών
Γ΄ Λυκείου ΕΠΑΛ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να δώσετε τον ορισμό της συχνότητας και της σχετικής συχνότητας μιας παρατήρησης x_i. *(7 Μονάδες)*

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο της x_0 τότε είναι και συνεχής σε αυτό το σημείο. **Σ Λ**

β) Η τυπική απόκλιση μιας παρατήρησης μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές **Σ Λ**

γ) Για $\bar{x} = -8$ και $s = 2$, έχουμε $CV = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$ ή -25% **Σ Λ**

δ) Ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$ **Σ Λ**

(2 Μονάδες ανά ερώτημα)

Α3. Να γράψετε στο τετράδιο σας δίπλα από το γράμμα της πρώτης στήλης τον αριθμό της δεύτερης στήλης ο οποίος αντιστοιχεί στην παράγουσα της συνάρτησης f(x)

Συνάρτηση f(x)	Παράγουσα F(x)
α. $2x^2 - 4x + \ln 2$	1. $4e^{3x} + c$
β. $4e^{3x}$	2. $\frac{4e^{3x}}{3} + c$
γ. $\frac{3}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, όπου $x > 0$	3. 3συνx + 4ημx + c
δ. 3ημx – 4συνx	4. – 3συνx – 4ημx + c
	5. $3\ln x - 2\sqrt{x} + c$
	6. $\frac{2x^3}{3} - 2x + x\ln 2 + c$

(4 Μονάδες)

Α4. Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τις παρακάτω προτάσεις και να της συμπληρώσετε.

α) Η διάμεσος των παρατηρήσεων 0, 5, 3, 2, 7, 9, 2 είναι ....

β) $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx =$ **.............**

γ) Αν μια συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε ……….

(2 Μονάδες ανά ερώτημα)

ΘΕΜΑ Β

Ρωτήσαμε τους μαθητές της Γ΄ τάξης ενός ΕΠΑΛ για τον αριθμό τον εξόδων τους σε μια βδομάδα και οι απαντήσεις τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x_i	v_i	$x_i v_i$	N_i	$f_i\%$
1	γ			
α	10			
3	γ			
β	20			
Σύνολα				

Όπου $\alpha = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ και β είναι το τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης $f(x)=x^2-2x+5$

Β1. Να υπολογίσεις τους πραγματικούς αριθμούς α και β

(5 Μονάδες)

Β2. Αν $\bar{x}=3$, να δείξετε ότι γ = 5

(5 Μονάδες)

Β3. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα

(5 Μονάδες)

Β4. Να υπολογίσετε το εύρος, την διάμεσο και την επικρατούσα τιμή

(5 Μονάδες)

Β5. Ποιο ποσοστό των μαθητών βγήκε τουλάχιστον δυο φορές;

(5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{x^2+5}}{2-x} & ,x<2\\[2ex] \dfrac{ax^2}{6} & ,x\ge 2\end{cases}$$

Γ1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

(5 Μονάδες)

Γ2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

(8 Μονάδες)

Γ3. Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, έτσι ώστε η συνάρτηση f(x) να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$

(7 Μονάδες)

Γ4. Για α = 1, να μελετήσετε την μονοτονία της f(x) στο $[2,+\infty)$

(5 Μονάδες)

Επιμέλεια Θεμάτων και Απαντήσεων: **Θάνος Λουκάς** (Μαθηματικός)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \alpha + \dfrac{1}{x-\beta}$, όπου α > 0 και $\beta \in \mathbb{N}$.

Δ1. Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f(x)

(5 Μονάδες)

Δ2. Να υπολογίσετε την τιμή του φυσικού αριθμού β, αν η συνάρτηση f(x) παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 0$

(7 Μονάδες)

Δ3. Να μελετήσετε την συνάρτηση f(x) ως προς την μονοτονία

(5 Μονάδες)

Δ4. Για υπολογίσετε την τιμή του θετικού αριθμού α, εάν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν της γραφικής παράστασης της f(x) με τον άξονα xx΄ και τις ευθείες x = 2 και x = 4 είναι (16 + ln3) τ.μ.

(8 Μονάδες)

Απαντήσεις Διαγωνίσματος

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 64 – 65

Α2. **α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Σ**

Α3. **α. 6 β. 2 γ. 5 δ. 4**

Α4. **α) δ = 3**

β) $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx$

γ) $f'(x_0) = 0$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε $\alpha = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2$

Και $f'(x) = 2x - 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με τιμή $f(1) = 1 - 2 + 5 = 4$
δηλ. $\beta = 4$

Β2.

x_i	v_i	$x_i v_i$
1	γ	γ
2	10	20
3	γ	3γ
4	20	80
Σύνολο	30 + 2γ	100 + 4γ

$$\bar{x} = 3 \Leftrightarrow 3 = \frac{100+4\gamma}{30+2\gamma} \Leftrightarrow 90+6\gamma = 100+4\gamma \Leftrightarrow 6\gamma - 4\gamma = 100-90 \Leftrightarrow 2\gamma = 10 \Leftrightarrow \gamma = 5$$

Β3.

x_i	v_i	$x_i v_i$	N_i	$f_i\%$
1	5	5	5	12,5
2	10	20	15	25
3	5	15	20	12,5
4	20	80	40	50
Σύνολα	40	120		100

Β4.

- Για το εύρος έχουμε: $R = X_{max} - X_{min} = 4 - 1 = 3$
- Για την διάμεσο έχουμε: ν = 40 (άρτιος) οπότε η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δυο μεσαίων παρατηρήσεων $\delta = \dfrac{20\eta + 21\eta}{2} = \dfrac{3+4}{2} = 3{,}5$
- Η επικρατούσα τιμή είναι: $M_0 = 4$
  (αφού έχει την μεγαλύτερη συχνότητα $\nu_4 = 20$)

Β5. Τουλάχιστον δυο φορές βγήκε το ποσοστό:

$f_2\% + f_3\% + f_4\% = 25 + 12{,}5 + 50 = 87{,}5\ \%$ των μαθητών.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{ax^2}{6} = \dfrac{\alpha\cdot 2^2}{6} = \dfrac{4\alpha}{6} = \dfrac{2\alpha}{3}$

Γ2.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{3-\sqrt{x^2+5}}{2-x} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\left(3-\sqrt{x^2+5}\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{(2-x)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{3^2-\sqrt{x^2+5}^{\,2}}{(2-x)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{9-\left(x^2+5\right)}{(2-x)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{9-x^2-5}{(2-x)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{4-x^2}{(2-x)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{(2-x)(2+x)}{(2-x)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2+x}{3+\sqrt{x^2+5}} = \frac{2+2}{3+\sqrt{2^2+5}} = \frac{4}{3+\sqrt{9}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Γ3. Έχουμε $f(2) = \dfrac{2\alpha}{3}$

Για να είναι συνεχής η f(x) στο $x_0 = 2$ θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{2\alpha}{3} \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Γ4. Στο διάστημα $[2,+\infty)$ για α = 1 έχουμε: $f(x) = \dfrac{x^2}{6}$

Παραγωγίσουμε την f(x), οπότε: $f'(x) = \dfrac{2x}{6} = \dfrac{x}{3}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Για x > 2 έχουμε $f'(x_0) > 0$
Άρα η f(x) στο διάστημα $[2,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Επιμέλεια Θεμάτων και Απαντήσεων: **Θάνος Λουκάς** (Μαθηματικός)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε $f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-\beta)^2}$

Δ2. Εφόσον η συνάρτηση f(x) παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 0$

έχουμε: $f'(0)=0 \Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{(0-\beta)^2}=0 \Leftrightarrow 1=\dfrac{1}{\beta^2} \Leftrightarrow \beta^2=1 \Leftrightarrow \beta=\pm 1$

Αλλά $\beta \in \mathbb{N}$ οπότε $\boxed{\beta=1}$

Δ3. Για β = 1 έχουμε: $f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ και $f(x)=x+\alpha+\dfrac{1}{x-1}$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1-1}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow \ x=0 \ \text{ή} \ x=2$$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
f΄(x)	+	0	−	0	+
f(x)	↗		↘		↗
		Τ.Μ		Τ.Ε.	

Στα διαστήματα $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$ η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως αύξουσα

Στα διαστήματα $[0,1)\cup(1,2]$ η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως φθίνουσα

Δ4. Για x = 2 έχουμε: $f(2)=2+\alpha+\dfrac{1}{2-1}=2+\alpha+1=3+\alpha$

Επειδή α > 0 έχουμε 3 + α > 0 δηλαδή f(2) > 0 (1)

Στο διάστημα [2,4] η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως αύξουσα άρα

$x\geq 2 \Leftrightarrow f(x)\geq f(2) \Leftrightarrow f(x)\geq 3+\alpha \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(x)>0$

οπότε:

$$\mathrm{E}=\int_2^4 |f(x)|dx=\int_2^4 f(x)dx=\int_2^4\left(x+\alpha+\frac{1}{x-1}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+\alpha x+\ln(x-1)\right]_2^4=$$

$$\frac{4^2}{2}+4\alpha+\ln(4-1)-\left[\frac{2^2}{2}+2\alpha+\ln(2-1)\right]=8+4\alpha+\ln 3-2-2a-\ln 1=6+2\alpha+\ln 3 \quad (2)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\mathrm{E}=16+\ln 3 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 6+2\alpha+\ln 3=16+\ln 3 \Leftrightarrow 2\alpha=16+\ln 3-6-\ln 3 \Leftrightarrow 2\alpha=10 \Leftrightarrow$$

$\boxed{\alpha=2}$

Επιμέλεια Θεμάτων και Απαντήσεων: **Θάνος Λουκάς** (Μαθηματικός)