ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$

Α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

(Μονάδες 8)

Β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, με τις πλευρές και τα αποστήματα, των κανονικών πολυγώνων, που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας R.

	Τετράγωνο	**Κανονικό εξάγωνο**	**Ισόπλευρο τρίγωνο**
Πλευρά λ_ν			
Απόστημα α_ν			

(Μονάδες 5)

Γ) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις ακόλουθες προτάσεις:

i) Σε κάθε τρίγωνο ισχύει: $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2 + \dfrac{\mu_\alpha^2}{2}$

ii) Σε κάθε τρίγωνο $ΑΒΓ$ το εμβαδόν του δίνεται από τον τύπο $Ε = \tau \cdot \rho$, όπου τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου και ρ η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

iii) Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ισχύει η σχέση $\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$.

iv) Αν δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ τότε ισχύει : $\frac{(ΑΒΓ)}{(Α'Β'Γ')} = 2\lambda$

v). Αν α, β, γ πλευρές τριγώνου ΑΒΓ με $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ τότε $\hat{A} < 90^0$.

vi) Αν $\Delta^{P}_{(O,R)} > 0$ τότε το σημείο Ρ είναι εξωτερικό του κύκλου.

(Μονάδες 2/ερώτημα)

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 5cm, ΑΓ= 3cm και ΒΓ=7cm.

Α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου και να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$

(Μονάδες 5)

Β) Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς ΑΒ πάνω στην ΒΓ. (Μονάδες 5)

Γ) Να υπολογίσετε την διάμεσο ΑΜ όπου Μ, το μέσο της ΒΓ (Μονάδες 5)

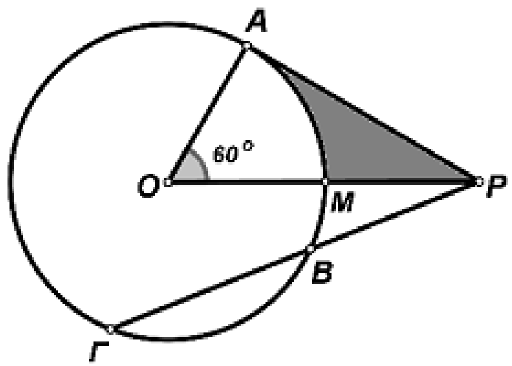
Δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)

Ε) Να υπολογίσετε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3^{Ο}

Στο παρακάτω σχήμα, ο κύκλος έχει ακτίνα $R = 2cm$ Αν το ΡΑ είναι εφαπτόμενο τμήμα, ΡΒΓ μία τυχαία τέμνουσα του κύκλου και $A\hat{O}M = 60^o$, τότε :



Α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{OP} = 2R$ (Μονάδες 5)

Β) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\mathrm{PB} \cdot \mathrm{P\Gamma}$ (Μονάδες 5)

Γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$. (Μονάδες 5)

Δ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του σκιασμένου χωρίου ΑΜΡ.

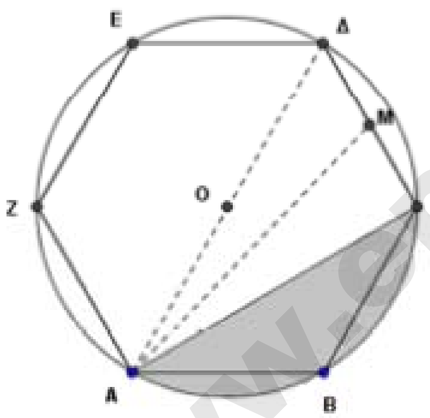
(Μονάδες 5)

Ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΜΡ

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4$^{\mathrm{O}}$

Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ, ΑΔ



και ΑΜ , όπου Μ το μέσο του ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

Α) $(\mathrm{AB\Gamma\Delta EZ}) = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 5)

Β) $(\mathrm{AM\Delta}) = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$. (Μονάδες 7)

Γ) (ΑΜΔΕΖ) = 2(ΑΒΓΜ) (Μονάδες 5)

Δ) Το εμβαδόν του (σκιασμένου) κυκλικού τμήματος που περικλείεται από τη χορδή ΑΓ και το τόξο ΑΒΓ είναι ίσο με: $\dfrac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$. (Μονάδες 8)

Καλή Επιτυχία

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$

Α) Σχολικό Βιβλίο σελ.197

Β) Σχολικό Βιβλίο σελ.239

Γ) i) Λ ii) Λ iii) Σ iv) Λ v) Λ vi) Σ

ΘΕΜΑ 2$^{\text{Ο}}$

Α) Παρατηρούμε ότι: $\text{ΒΓ}^2 = 7^2 = 49$ και $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$, οπότε

$\text{ΒΓ}^2 > \text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2$ άρα το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο με αμβλεία την $\widehat{\text{Α}}$.

Θα εφαρμόσουμε το νόμο των συνημιτόνων:

$\text{ΒΓ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2 - 2\text{ΑΒΑΓ}\sigma\upsilon\nu\text{Α} \Rightarrow 49 = 25 + 9 - 2\cdot 5\cdot 3\sigma\upsilon\nu\text{Α} \Rightarrow 15 = -30\sigma\upsilon\nu\text{Α}$.

Άρα $\sigma\upsilon\nu\text{Α} = -\dfrac{1}{2}$ οπότε $\widehat{\text{Α}} = 120^\circ$.

Β) Θα εφαρμόσουμε θεώρημα οξείας γωνίας για τη γωνία $\widehat{\text{Β}}$:

$\text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2 - 2\text{ΒΓ}\cdot\text{ΒΔ} \Rightarrow 9 = 25 + 49 - 14\text{ΒΔ}$. Οπότε $14\text{ΒΔ}=65 \Rightarrow \text{ΒΔ}=\dfrac{65}{14}$.

Γ) Θα εφαρμόσουμε το πρώτο θεώρημα διαμέσων:

$$\text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2 = 2\text{ΑΜ}^2 + \frac{\text{ΒΓ}^2}{2} \Rightarrow 25 + 9 = 2\text{ΑΜ}^2 + \frac{49}{2} \Rightarrow 68 = 4\text{ΑΜ}^2 + 49 \Rightarrow 4\text{ΑΜ}^2 = 19 \Rightarrow \text{ΑΜ} = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

Δ) $(\text{ΑΒΓ}) = \dfrac{1}{2}\cdot\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}\cdot\eta\mu\widehat{\text{Α}} = \dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot\eta\mu 120^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot 15\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

Ε) $(\text{ΑΒΓ}) = \dfrac{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}\cdot\text{ΒΓ}}{4R} \Rightarrow \dfrac{15\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\cdot 5\cdot 7}{4R} \Rightarrow R = \dfrac{7}{\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

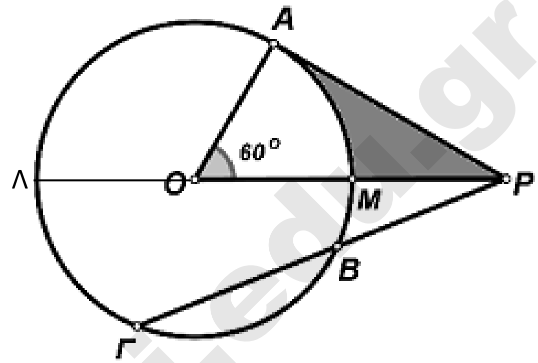
ΘΕΜΑ 3^{Ο}

Α) $\widehat{\mathrm{A}}=90^\circ$ ως γωνία ακτίνας και εφαπτομένης. Άρα η γωνία $\mathrm{O\hat{P}A}=30^\circ$. Οπότε

$$\mathrm{OA}=\frac{\mathrm{OP}}{2}\Rightarrow \mathrm{OP}=2\mathrm{OA}\Rightarrow \mathrm{OP}=2R=4$$

Β) Ισχύει ότι: $\mathrm{PB}\cdot\mathrm{P\Gamma}=\mathrm{PA}^2=\mathrm{PO}^2-\mathrm{OA}^2=(2R)^2-R^2=3R^2=12$

Γ) $l=\dfrac{\pi R\mu}{180^\circ}=\dfrac{\pi\cdot 2\cdot 60^\circ}{180^\circ}=\dfrac{2\pi}{3}$



Δ) Προεκτείνουμε την ΡΟ κατά τμήμα ΟΛ. Τότε ισχύει:

$$\mathrm{PM}\cdot\mathrm{P\Lambda}=\mathrm{PB}\cdot\mathrm{P\Gamma}\Rightarrow \mathrm{PM}\cdot(\mathrm{PO}+\mathrm{O\Lambda})=12\Rightarrow \mathrm{PM}\cdot(2R+R)=12\Rightarrow 6\mathrm{PM}=12\Rightarrow \mathrm{PM}=2$$

Επομένως η περίμετρος του χωρίου ΑΜΡ είναι: Π=ΡΜ+ΡΑ+$l=2+\sqrt{12}+\dfrac{2\pi}{3}$

Ε) $(\mathrm{AMP})=(\mathrm{OAP})-(\widehat{\mathrm{OAM}})=\dfrac{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AP}}{2}-\dfrac{\pi R^2\mu}{360^\circ}=\dfrac{2\cdot\sqrt{12}}{2}-\dfrac{\pi\cdot 4\cdot 60^\circ}{360^\circ}=\sqrt{12}-\dfrac{2\pi}{3}$

ΘΕΜΑ 4^{Ο}

Α) $(\mathrm{AB\Gamma\Delta EZ})=\mathrm{E}_6=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{P}_6\cdot\alpha_6=\dfrac{1}{2}\cdot 6R\dfrac{R\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

Β) Η γωνία ΑΓΔ είναι ορθή γιατί είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο και $\Gamma\Delta=\lambda_6=R$, οπότε από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$\mathrm{A\Gamma}^2=\mathrm{A\Delta}^2-\Gamma\Delta^2=(2R)^2-R^2=3R^2\Rightarrow \mathrm{A\Gamma}=R\sqrt{3}$. Η ΑΜ είναι διάμεσος στο ΑΓΔ τρίγωνο άρα $(\mathrm{AM\Delta})=\dfrac{1}{2}(\mathrm{A\Gamma\Delta})=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{A\Gamma}\cdot\Gamma\Delta}{2}=\dfrac{1}{4}\cdot R\cdot R\sqrt{3}=\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

Γ) $\left(\text{ΑΜΔΕΖ}\right)=\left(\text{ΑΜΔ}\right)+\left(\text{ΑΔΕΖ}\right)=\left(\text{ΑΜΔ}\right)+\frac{1}{2}\text{Ε}_6=\frac{R^2\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}=R^2\sqrt{3}$

$$\left(\text{ΑΒΓΜ}\right)=\frac{\text{Ε}_6}{2}-\left(\text{ΑΜΔ}\right)=\frac{\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}}{2}-\frac{R^2\sqrt{3}}{4}=\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει το ζητούμενο

Δ) Έστω Ε το ζητούμενο εμβαδό. Είναι:

$$\text{Ε}=\left(\widehat{\text{ΟΑΓ}}\right)-\left(\text{ΟΑΓ}\right)=\frac{\pi R^2\cdot 120^\circ}{360^\circ}-\frac{1}{2}\text{ΟΑ}\cdot\text{ΟΓ}\cdot\eta\mu 120^\circ=\frac{\pi R^2}{3}-\frac{1}{2}R\cdot R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{R^2}{12}(4\pi-3\sqrt{3})$$