ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Α) Να αποδείξετε ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30^o,

τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα .

(Μονάδες 8)

Β) Να αναφέρετε τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο.

(Μονάδες 5)

Γ) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις ακόλουθες προτάσεις:

i) Δύο κύκλοι (Ο, R) και (Κ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά αν (ΟΚ)= R-ρ.

ii) Ένα τετράπλευρο που οι διαγώνιοί του διχοτομούνται είναι παραλληλόγραμμο.

iii) Ορθόκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου.

iv) Αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

v) Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

vi) Η διάμεσος κάθε τραπεζίου ισούται με το άθροισμα των βάσεων του.

(Μονάδες 2/ερώτημα)

<u>ΘΕΜΑ 2^{Ο}</u>

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^o$) και ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$. Από το Δ φέρουμε ΔΕ⊥ΒΓ, και έστω Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ (προς το Α). Να αποδείξετε ότι:

Α) ΑΒ=ΒΕ (Μονάδες 9)

Β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

Γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΖΓ (Μονάδες 8)

<u>ΘΕΜΑ 3 ^{Ο}</u>

Στο διπλανό σχήμα, δίνεται κύκλος (Ο, R) με διάμετρο ΑΒ. Οι ΑΔ, ΒΓ, ΓΔ είναι εφαπτόμενες στα σημεία Α, Β , Ε του κύκλου αντίστοιχα και ισχύει $\widehat{A\Delta\Gamma} = 60^0$.

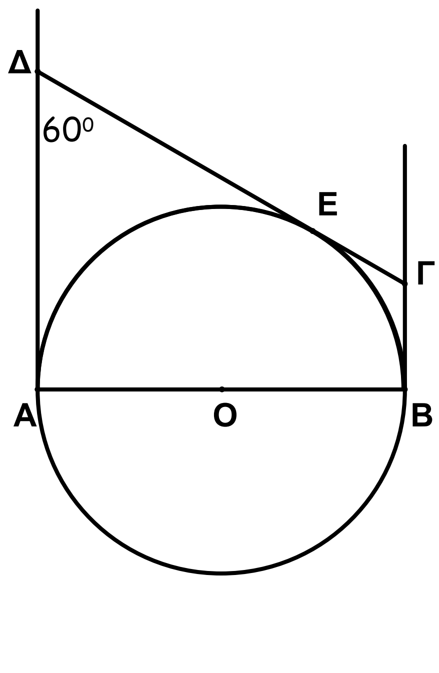
Να αποδειχθεί ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 5)

β)ΑΔ + ΒΓ = ΓΔ (Μονάδες 5)

γ) Το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

δ) Οι κύκλοι (Ο, R) και (Δ, R) εφάπτονται εξωτερικά (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4 ^{o}

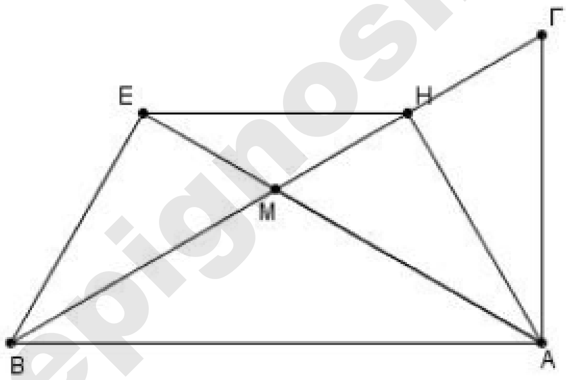
Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A}=90^{o}$) έχουμε ότι $\widehat{B}=30^{\circ}$. Φέρουμε το ύψος ΑΗ και τη διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ. Από την κορυφή Β φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο ΑΜ, η οποία την τέμνει στο σημείο Ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

Α) $BE=\frac{AB}{2}$ (Μονάδες 7)

Β) ΑΗ=ΒΕ, (Μονάδες 7)

Γ) το τετράπλευρο ΑΗΕΒ είναι εγγράψιμο (Μονάδες 6)

Δ) ΕΗ//ΑΒ. (Μονάδες 5)



Καλή Επιτυχία

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

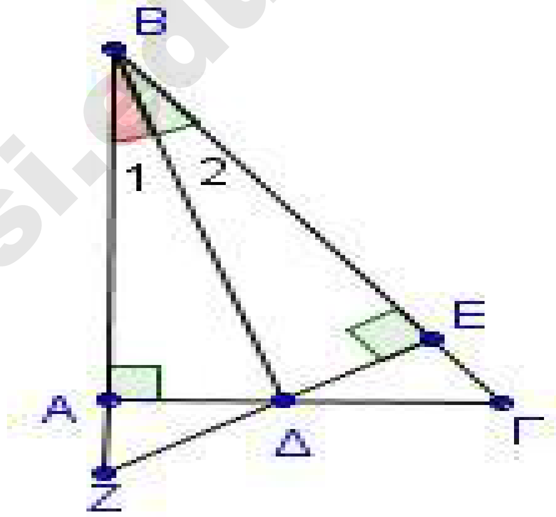
ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Α) Σχολικό Βιβλίο σελ.110

Β) Σχολικό Βιβλίο σελ.101

Γ) i) Λ   ii) Σ   iii) Λ   iv) Λ   v) Λ   vi) Λ

ΘΕΜΑ 2^{Ο}



Α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΕΔ έχουν:

1) τη πλευρά ΒΔ κοινή

2) $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ αφού ΒΔ διχοτόμος

Άρα τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα. Επομένως θα έχουν όλα τους τα στοιχεία ίσα. Άρα **ΑΒ=ΒΕ,** ΑΔ=ΔΕ.

Β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ έχουν:
1) Τη γωνία Β κοινή
2) ΑΒ=ΒΕ (Α ερώτημα)
Άρα τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια κάθετη πλευρά τους ίση και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι **ίσα**. Επομένως θα έχουν όλα τους τα στοιχεία ίσα. Άρα ΒΖ=ΒΓ

Γ) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ-ΔΕΓ έχουν:
1) ΑΔ=ΔΕ (Α ερώτημα)
2) $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$ ως κατακορυφήν
Άρα είναι ίσα, οπότε ΔΖ=ΔΓ
Παρατηρούμε ότι από τις δύο τελευταίες συγκρίσεις ισχύει ΒΖ=ΒΓ και ΔΖ=ΔΓ. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία Β και Δ ισαπέχουν από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος ΖΓ. Οπότε ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΖΓ. Επομένως η ΒΔ είναι η μεσοκάθετος του ΖΓ.

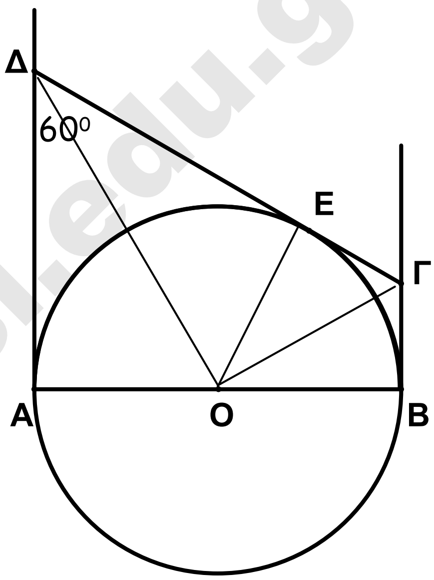
ΘΕΜΑ 3^{Ο}

Α) Ισχύει ότι $ΑΔ \perp ΑΒ$ και $ΓΒ \perp ΑΒ$ εφόσον εφαπτομένη και ακτίνα είναι κάθετες. Άρα ΑΔ//ΓΒ, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει δύο πλευρές παράλληλες και είναι τραπέζιο.

Β) ΑΔ=ΔΕ (1) ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου.

Ομοίως, ΓΒ=ΓΕ (2). Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

ΑΔ+ΓΒ=ΔΕ+ΓΕ=ΓΔ



Γ) Ισχύει ότι η ΓΟ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΟΕ

και η ΔΟ είναι διχοτόμος της γωνίας ΕΟΔ

εφόσον η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής. Επειδή οι γωνίες ΒΟΕ-ΕΟΔ είναι εφεξής και παραπληρωματικές θα έχουν κάθετες διχοτόμους.

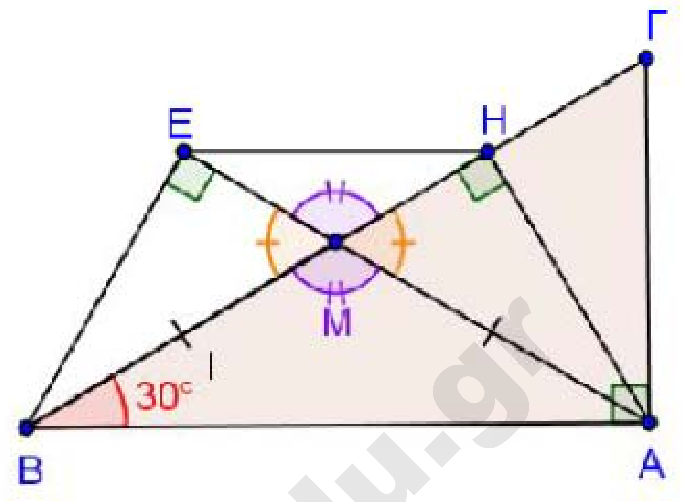
Άρα $ΓΟ \perp ΟΔ$, οπότε το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο.

Δ) Ισχύει $Α\hat{Δ}Ο = 30^{\circ}$ αφού ΔΟ διχοτόμος της $\widehat{ΑΔΓ} = 60^{0}$

Οπότε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΟ έχει μια οξεία γωνία

30° άρα $ΑΟ = \frac{ΔΟ}{2} \Rightarrow ΔΟ = 2ΑΟ \Rightarrow ΔΟ = 2R$. Επομένως ΔΟ=R+R, έτσι οι κύκλοι (Ο, R) και (Δ, R) εφάπτονται εξωτερικά.

ΘΕΜΑ 4 ^{o}



Α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα,

άρα $AM = MB = M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$ οπότε το τρίγωνο ΜΒΑ είναι ισοσκελές με βάση

την ΑΒ και $\widehat{A}_1 = M\widehat{B}A = 30^\circ$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΑΒ είναι $\widehat{A}_1 = 30^\circ$, οπότε $BE = \frac{AB}{2}$.

Β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΗΑ είναι $M\widehat{B}A = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{AB}{2} = BE$

Γ) Επειδή $B\widehat{E}A = B\widehat{H}A = 90^\circ$ στο τετράπλευρο ΑΗΕΒ η πλευρά του ΑΒ φαίνεται από τις κορυφές Ε και Η υπό ίσες γωνίες, άρα το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.

Δ) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΕΒ και ΜΗΑ έχουν:
1) ΑΗ = ΒΕ
2) ΕΜΒ = ΗΜΑ ως κατακορυφήν
άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΜΕ = ΜΗ.
Τότε το τρίγωνο ΜΕΗ είναι ισοσκελές με βάση την ΕΗ και έχει ΜΕΗ = ΜΗΕ .
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΜΒΑ έχουμε:
ΒΜΑ +ΜΒΑ + Α1 =180 ⇔ΒΜΑ + 30 + 30 =180 ⇔ΒΜΑ =120 .
Επειδή οι γωνίες ΒΜΑ και ΕΜΗ είναι κατακορυφήν, είναι και ΕΜΗ =120 .
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΕΜΗ έχουμε:
ΕΜΗ +ΜΕΗ +ΜΗΕ =180⇔120+2ΜΕΗ =180 ⇔ΜΕΗ = 30=ΜΗΕ
Επειδή οι γωνίες ΜΕΗ και Α1 είναι εντός εναλλάξ των ΕΗ και ΑΒ που τέμνονται από την ΕΑ και είναι και ίσες, οι ευθείες ΕΗ και ΑΒ είναι παράλληλες.