Θέματα

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β). **(9 μονάδες)**

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat και τη γεωμετρική του ερμηνεία.

(6 μονάδες)

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστές** ή **Λάθος**.

α) Το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x'x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x'x.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα Δ, τότε $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

δ) Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

(10 μονάδες)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{|z|x}-1}{x}, & x<0\\ \dfrac{|z|\eta\mu(|z|x)-\eta\mu 2x}{x}, & x>0\end{cases}$ και $z,w\in\mathbb{C}$

Β1. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z και w αν είναι $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{4}{z}\right)$. **(8 μονάδες)**

Β2. Να δείξετε ότι αν z_1, z_2, z_3 μιγαδικοί που ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z που βρήκατε στο Β1 ερώτημα, τότε ισχύει: $|z_1+z_2+z_3||z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1| \le 72$ **(9 μονάδες)**

Β3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τη $g(x)=x^2f(x)$ και τις ευθείες $x=-2$ και $x=-1$ **(8 μονάδες)**

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει

$f(x)-x \le \frac{f(1)+f(-1)}{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και οι μιγαδικοί $z, w \in \mathbb{C}^*$

με $z=1+(f(1)-2)i$ και $w=f(1)+f(-1)i$ με $||z|-|w||=|z+w|$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι ισχύουν: $f(1)-1=1+f(-1)$ **(1)** **(5 μονάδες)**

Γ2. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=1+f(-1)<1$ **(5 μονάδες)**

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(-1,1)$ με $\xi_1<\xi_2$ ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2$ **(4 μονάδες)**

Γ4. Η C_f έχει δύο τουλάχιστον πιθανά σημεία καμπής. **(6 μονάδες)**

Γ5. Αν η πορεία που ακολουθεί ένα πλοίο δίνεται από τη γραφική παράσταση της f για την οποία ισχύει $f(x)-x=\frac{f(1)+f(-1)}{2}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του πλοίου τη χρονική στιγμή που αυτό διέρχεται από το σημείο (1,f(1)), αν η τεταγμένη του ελαττώνεται με ρυθμό $4-2f(1)\ \mu/s$ **(5 μονάδες)**

Θέμα Δ

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$g(x)=\int_0^x \frac{1}{g^4(t)+1}dt$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **(1)**

Δ1. Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1 και να βρείτε τον τύπο της g^{-1} **(8 μονάδες)**

Δ2. Να προσδιορίσετε το $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\frac{1}{g^{-1}(t)}dt$. **(6 μονάδες)**

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο καμπής της C_g το οποίο και να προσδιορίσετε. **(5 μονάδες)**

Δ4. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $g(2x+1)=x$

(6 μονάδες)

Απαντήσεις

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ:262

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ:260

Α3. **α)** **Σ**… Σχολικό βιβλίο σελ:346

β) **Σ**… Σχολικό βιβλίο σελ:192

γ) **Λ**… Σχολικό βιβλίο σελ:274

δ) **Σ**… Σχολικό βιβλίο σελ:281

ε) **Λ**… Σχολικό βιβλίο σελ:194

Θέμα Β

Β1. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{|z|x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(e^{|z|x}-1)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0^-} |z|e^{|z|x} = |z|$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|z|\eta\mu(|z|x)-\eta\mu 2x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(|z|\eta\mu(|z|x)-\eta\mu 2x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0^+}\left(|z|^2\sigma\upsilon\nu(|z|x)-2\sigma\upsilon\nu 2x\right)$$

$= |z|^2 - 2$

Επομένως θα πρέπει $|z|^2-2=|z| \Leftrightarrow |z|^2-|z|-2=0 \Leftrightarrow |z|=2$ άρα ανήκουν σε κύκλο $x^2+y^2=4$ με κέντρο το K(0,0) και ακτίνα ρ=2.

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{4}{z}\right)=\frac{1}{2}(z+\bar{z})=\frac{1}{2}2\,\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z)$$

Επομένως ισχύει $-2\le \mathrm{Re}(z)\le 2 \Leftrightarrow -2\le w\le 2$ δηλαδή ο w κινείται πάνω στον x΄x στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία (-2,0) και (2,0).

Β2. Αφού z_1, z_2, z_3 σημεία του παραπάνω κύκλου θα ισχύουν:

$|z_i|=2 \Leftrightarrow |z_i|^2=4 \Leftrightarrow \bar{z_i}=\dfrac{4}{z_i}$ $\quad i=1,2,3$ Οπότε $|z_1+z_2+z_3||z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|\le 72$

$$\Leftrightarrow |z_1+z_2+z_3|\frac{|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|}{|z_1z_2z_3|}\le \frac{72}{|z_1z_2z_3|} \Leftrightarrow |z_1+z_2+z_3|\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|\le 9 \Leftrightarrow$$

$$|z_1+z_2+z_3|\cdot 4\cdot\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|\le 4\cdot 9 \Leftrightarrow |z_1+z_2+z_3|\left|\frac{4}{z_1}+\frac{4}{z_2}+\frac{4}{z_3}\right|\le 36 \Leftrightarrow$$

$$|z_1+z_2+z_3|\left|\overline{z_1+z_2+z_3}\right|\le 36 \Leftrightarrow |z_1+z_2+z_3|^2\le 36$$

$\Leftrightarrow |z_1+z_2+z_3|\le 6$ ισχύει αφού $|z_1+z_2+z_3|\le|z_1|+|z_2|+|z_3|=2+2+2=6$

Β3. Είναι $f(x) \overset{x<0}{=} \dfrac{e^{2x}-1}{x} > 0$ για $x<0$

Επομένως $g(x) = x^2 f(x) > 0$ για κάθε $x \in [-2,-1]$ Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$\int_{-2}^{-1} g(x)dx = \int_{-2}^{-1} x^2 f(x)dx = \int_{-2}^{-1} x^2 \frac{e^{2x}-1}{x}dx = \int_{-2}^{-1}\left(xe^{2x}-x\right)dx = \int_{-2}^{-1} xe^{2x}dx - \int_{-2}^{-1} xdx =$$

$$\int_{-2}^{-1} x\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx - \int_{-2}^{-1} xdx = \left[x\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1}\frac{e^{2x}}{2}dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} = \left[x\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} =$$

$$\left(-\frac{e^{-2}}{2} + \cancel{2}\frac{e^{-4}}{\cancel{2}}\right) - \left(\frac{e^{-2}}{4} - \frac{e^{-4}}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{2}\right) = \ldots = \frac{5e^{-4}}{4} - \frac{3e^{-2}}{4} + \frac{3}{2} = \frac{6+5e^{-4}-3e^{-2}}{4}$$

Θέμα Γ

Γ1.

Είναι $f(x) - x \le \dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε για $x = 1$

$f(1) - 1 \le \dfrac{f(1)+f(-1)}{2} \Leftrightarrow 2f(1) - 2 \le f(1) + f(-1) \Leftrightarrow f(1) - 1 \le 1 + f(-1)$ ενώ για $x = -1$

$f(-1) + 1 \le \dfrac{f(1)+f(-1)}{2} \Leftrightarrow 2f(-1) + 2 \le f(1) + f(-1) \Leftrightarrow f(-1) + 1 \le f(1) - 1$

Τελικά ισχύει $f(1) - 1 = 1 + f(-1)$ **(1)**

Γ2. Έστω $g(x) = f(x) - 1 - f(-1)$. Τότε g συνεχής στο [-1,1] ως πράξεις συνεχών και ισχύει

$g(-1) = f(-1) - 1 - f(-1) = -1 < 0$ και $g(1) = f(1) - 1 - f(-1) = f(-1) + 1 - f(-1) = 1 > 0$

Άρα είναι $g(-1)g(1) < 0$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 1 + f(-1)$. Επιπλέον ισχύει

$$\left||z|-|w|\right| = |z+w| \Rightarrow \left||z|-|w|\right|^2 = |z+w|^2 \Rightarrow |z|^2 - 2|z||w| + |w|^2 = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \Rightarrow$$

$$|z|^2 - 2|z||w| + |w|^2 = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \Rightarrow -2|z||w| = z\overline{w} + w\overline{z} \Rightarrow \mathrm{Re}(z\overline{w}) \le 0 \Rightarrow$$

$$f(1) + f(-1)\left(f(1) - 2\right) \le 0 \Rightarrow f(1) + f^2(-1) \le 0 \Rightarrow f(1) \le -f^2(-1) \le 0$$

Επομένως και $f(-1) = f(1) - 2 \le -2 < 0$ και τελικά $f(x_0) = 1 + f(-1) < 1$

Γ3. Η συνάρτηση f ως δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής με συνεχή πρώτη παράγωγο στα [-1,0] και [0,1]. Επομένως ικανοποιεί τις υποθέσεις του ΘΜΤ σε καθένα από αυτά.

Άρα θα υπάρχουν

$\xi_1 \in (-1,0)$ και $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}$ και $f'(\xi_2) = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}$

Επομένως $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = f(1) - f(-1) \overset{(1)}{=} 2$

Γ4. Εφαρμόζοντας ΘΜΤ για την f στο [-1,1] έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ στο (-1,1) ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = 1$ **(2)**

Επίσης έχουμε $f(x) - x \le \dfrac{f(1)+f(-1)}{2} \Leftrightarrow f(x) - x \le \dfrac{(f(1)-1)+(f(-1)-(-1))}{2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$f(x) - x \le f(1) - 1 = f(-1) - (-1)$ (3)

Επομένως αν $h(x) = f(x) - x,\ x \in \mathbb{R}$, η (3) γίνεται : $h(x) \le h(1) = h(-1)$

Δηλαδή παρουσιάζει ακρότατο για x_1=-1 και x_2=1άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat θα είναι $h'(-1) = 0 = h'(1) \Rightarrow f'(-1) - 1 = 0 = f'(1) - 1 \Rightarrow f'(-1) = 1 = f'(1)$

Τελικά η $f'(x) = 1$ έχει τρεις τουλάχιστον ρίζες, οπότε αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα Rolle για την f' στα [-1,ξ] και [ξ,1] διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (-1,\xi)$ και τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (\xi,1)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) = 0 = f''(\xi_2)$ άρα έχει τουλάχιστον δύο υποψήφια σημεία καμπής.

Γ5. Αν θέσουμε $y = f(x)$ τότε έχουμε $y(t) = x(t) + \dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$

Παραγωγίζοντας κατά μέλη έχουμε $y'(t) = x'(t)$ οπότε τη χρονική στιγμή t_0 που περνά από το (1,f(1)) έχουμε $y'(t_0) = x'(t_0) \Rightarrow -(4 - 2f(1)) = x'(t_0) \Rightarrow x'(t_0) = 2f(1) - 4$

Θέμα Δ

Δ1. Αφού g συνεχής τότε και η $\dfrac{1}{g^4(t)+1}$ θα είναι συνεχής άρα η συνάρτηση $\int_0^x \dfrac{1}{g^4(t)+1}dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα είναι παραγωγίσιμη. Επομένως g παραγωγίσιμη λόγω της (1) και $g'(x) = \dfrac{1}{g^4(x)+1} > 0$ (2) άρα η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1. Από τη σχέση (2) έχουμε

$$g'(x)g^4(x) + g'(x) = 1 \Rightarrow \left(\frac{5g'(x)g^4(x)}{5} + g(x)\right) = (x)' \Rightarrow \left(\frac{g^5(x)}{5} + g(x)\right)' = (x)' \Rightarrow$$

$$\frac{g^5(x)}{5} + g(x) = x + c \quad (3)$$

Όμως από (1) για x=0 έχουμε $g(0) = \int_0^0 \dfrac{1}{g^4(t)+1}dt = 0$ άρα από τη σχέση (3) προκύπτει ότι c=0. Τελικά (3) $\Rightarrow g^5(x) + 5g(x) = 5x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (4)

Αν θέσουμε f(x)=y γίνεται $y^5+5y=5x \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}y^5+y$ με $y\in\mathbb{R}$. Επομένως είναι

$$g^{-1}(x)=\frac{1}{5}x^5+x=\frac{x^5+5x}{5}$$

Δ2. Αν θέσουμε $f(x)=\frac{1}{g^{-1}(x)}=\frac{5}{x^5+5x}$ τότε $f'(x)=-\frac{5\left(5x^4+5\right)}{\left(x^5+5x\right)^2}<0$ άρα f γνησίως φθίνουσα.

Επομένως για κάθε x>0 ισχύει

$$x\le t\le x+1 \Rightarrow f(x)\ge f(t)\ge f(x+1)\Rightarrow \int_x^{x+1} f(x)dt \ge \int_x^{x+1} f(t)dt \ge \int_x^{x+1} f(x+1)dt \Rightarrow$$

$$f(x)\int_x^{x+1} dt \ge \int_x^{x+1} f(t)dt \ge f(x+1)\int_x^{x+1} dt \Rightarrow f(x)(x+1-x)\ge \int_x^{x+1} f(t)dt \ge f(x+1)(x+1-x)\Rightarrow$$

$$f(x)\ge \int_x^{x+1} f(t)dt \ge f(x+1)\Rightarrow \frac{5}{x^5+5x}\ge \int_x^{x+1} f(t)dt \ge \frac{5}{(x+1)^5+5(x+1)}$$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x^5+5x}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{(x+1)^5+5(x+1)}=0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)dt=0$

Δ3.

Δείξαμε ότι $g^5(x)+5g(x)=5x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε παραγωγίζοντας κατά μέλη έχουμε

$$g'(x)g^4(x)+g'(x)=1\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{g^4(x)+1}\Rightarrow g''(x)=-\frac{4g^3(x)g'(x)}{\left(g^4(x)+1\right)^2}$$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$g''(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ μοναδική ρίζα αφού g γνησίως αύξουσα.

Επίσης για $x>0 \Rightarrow g(x)>g(0)=0$ οπότε $g''(x)<0$ και για $x<0\Rightarrow g(x)<g(0)=0$ οπότε $g''(x)>0$ άρα η g παρουσιάζει καμπή στο (0,0)

Δ4. $g(2x+1)=x\Rightarrow 2x+1=g^{-1}(x)\Rightarrow 2x+1=\frac{1}{5}x^5+x\Rightarrow x^5-5x-5=0$

Αν θέσουμε $h(x)=x^5-5x-5\Rightarrow h'(x)=5x^4-5$ και $h'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm1$ Άρα προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας

x	$-\infty$ -1	1	$+\infty$
$h'(x)$	+	-	+
$h(x)$	↗	↘	↗
	h(-1)=-1	h(1)=-9	

Παρατηρούμε ότι η h(x)=0 δεν είναι δυνατόν να έχει ρίζες στα $(-\infty,-1]$ και $[-1,1]$

Όμως $h\left([1,+\infty)\right)=[h(1),\lim\limits_{x\to+\infty}h(x))=[-9,+\infty)$ και $0\in[-9,+\infty)$ άρα από Θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών υπάρχει μοναδικό (λόγω μονοτονίας) $x_0\in(1,+\infty):h(x_0)=0$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα.