Θέματα

Θέμα A

A1. Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω, ισχύει P(A-B)=P(A)-P($A \cap B$) **(9 μονάδες)**

A2. Να διατυπώσετε το νόμο των μεγάλων αριθμών. **(6 μονάδες)**

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποιοτικών δεδομένων**.** **Σ Λ**

β. Η αθροιστική συχνότητα N_i ορίζεται και για ποιοτικές μεταβλητές. **Σ Λ**

γ. Ισχύει ότι: $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f(x)'\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)$ **Σ Λ**

δ. Υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε ένα σημείο. **Σ Λ**

ε. Στην πράξη ιδιαίτερα στην περίπτωση που δεν ισχύει ο κλασσικός ορισμός της Πιθανότητας, ως πιθανότητα ενός ενδεχομένου A λαμβάνεται το όριο της σχετικής του συχνότητας. **Σ Λ**

(10 μονάδες)

Θέμα B

Έστω f και g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,+\infty)$ και Ω ο δειγματικός χώρος της ρίψης ενός νομίσματος δύο φορές. Αν A και B ενδεχόμενα του Ω με πιθανότητες P(A) και P(B) αντίστοιχα και ισχύει

$f(x) = e^{\eta\mu x} + \sqrt{\eta\mu x + 16P(A)}$ και $g(x) = \dfrac{3\sqrt{x+3}-6}{x^3-1} + \dfrac{15}{16}P(B)$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$ τότε:

B1. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0=0$ **(6 μονάδες)**

B2. Αν η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το (1,1) να υπολογίσετε την P(B). **(6 μονάδες)**

B3. Να δείξετε ότι ισχύει: $5\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 4\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-3}{h}$ **(4 μονάδες)**

B4. Να αποδείξετε ότι τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα **(3 μονάδες)**

B5. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{20} \le P(A \cap B) \le \dfrac{1}{4}$ **(6 μονάδες)**

www.epignosi.edu.gr

Θέμα Γ

Σε μια μεταφορική εταιρία ομαδοποιηθήκαν τα βάρη των δεμάτων μιας μέρας σε εκατοντάδες γραμμάρια και σε 6 κλάσεις ίσου πλάτους. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων, ο πρώτος και ο τρίτος ιστός είναι ισεμβαδικοί.

Γ1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων:

[α,β)	x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[,)					
[,)					16
[,)			8		
[,32)					
[,)		6			88
[,)	38				
Σύνολο		ν=25			

(7 μονάδες)

Γ2. Να σχεδιάσετε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και το πολύγωνο συχνοτήτων. **(3 μονάδες)**

Γ3. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής (CV) για τα βάρη των δεμάτων. **(3 μονάδες)**

Γ4. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-x)^2$. **(5 μονάδες)**

Γ5. Το βάρος των «μισογεμάτων» δεμάτων συνήθως δεν ξεπερνά τα 3000gr. ενώ ένα δέμα λέμε ότι έχει φυσιολογικό βάρος, αν το βάρος του είναι τουλάχιστον 2800gr αλλά κάτω από 3600gr. Επιλέγουμε τυχαία ένα δέμα. Ποια η πιθανότητα να είναι «μισογεμάτο» ή να έχει φυσιολογικό βάρος;
(δίνεται: $\sqrt{29,44}=5,43$**)** **(7 μονάδες)**

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\dfrac{x-2\sqrt{P(A)x}+P(A)}{\left[x-P(A)\right]^2}$, και P(A), P(B) οι πιθανότητες των ενδεχομένων A, B αντίστοιχα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A, B \neq \varnothing$ και $A \subseteq B$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{\left[\sqrt{x}+\sqrt{P(A)}\right]^2}$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to P(A)} f(x)=\frac{1}{4P(A)}$$ **(8 μονάδες)**

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο : $g(x)=L\cdot(x^2-\ln x)$, όπου L το όριο του (α) ερωτήματος. Να μελετηθεί η g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι: $\ln\dfrac{P(B)}{2}-\ln\dfrac{P(A)}{2}\geq P(B-A)$. **(9 μονάδες)**

Δ3. Να βρείτε την πιθανότητα P(A) , αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f έχει στο $x_0 = 1$ εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $27x + 125y = 2005$ **(8 μονάδες)**

www.epignosi.edu.gr

Απαντήσεις

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 152.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 148.

Α3. **α. Λ σελ:70 β. Λ σελ:70 γ. Λ σελ:31 δ. Σ σελ:23 ε. Σ σελ:149**

Θέμα Β

Β1. $f'(x)=\left(e^{\eta\mu x}+\sqrt{\eta\mu x+16P(A)}\right)'=e^{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{\eta\mu x+16P(A)}}$ Όμως αν Κ το ενδεχόμενο να φέρουμε κεφαλή και Γ το ενδεχόμενο να φέρουμε γράμματα κατά τη ρίψη του νομίσματος εύκολα βρίσκουμε (καλό είναι να γίνει το σχετικό δεντροδιάγραμμα) Ω={ΚΚ,ΚΓ,ΓΚ,ΓΓ} επομένως P(A)=1/4.

Συνεπώς $f'(x)=e^{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{\eta\mu x+16\frac{1}{4}}}=e^{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{\eta\mu x+4}}\overset{x=0}{\Rightarrow}f'(0)=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$

και $f(0)=1+2=3$ Επομένως αν y=ax+b η ζητούμενη, ισχύει $a=f'(x)=\dfrac{5}{4}$ και

$f(0)=a0+b\Rightarrow b=3$ Τελικά $y=\dfrac{5}{4}x+3$ είναι η ζητούμενη εφαπτομένη.

Β2.

$$\text{Αφού g συνεχής θα ισχύει } g(1)=\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\frac{3\sqrt{x+3}-6}{x^3-1}+\frac{15}{16}P(B)=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{3\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{(x-1)(x^2+x+1)}+\frac{15}{16}P(B)=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}+\frac{15}{16}P(B)$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{3}{(x^2+x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}+\frac{15}{16}P(B)\Leftrightarrow 1=\frac{3}{12}+\frac{15}{16}P(B)\Leftrightarrow\frac{15}{16}P(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow P(B)=\frac{3}{4}\cdot\frac{16}{15}=\frac{4}{5}$$

Β3.

$$5\lim_{x\to1}g(x)=4\lim_{h\to0}\frac{f(h)-3}{h}\Leftrightarrow 5\lim_{x\to1}g(x)=4\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\lim_{x\to1}g(x)=4f'(0)\Leftrightarrow 5\cdot1=4\cdot\frac{5}{4}\text{ που ισχύει}$$

Β4.

Αν υποθέσουμε ότι $A\cap B=\varnothing$ τότε

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{4}+\frac{4}{5}=\frac{21}{20}>1 \quad \text{άτοπο}$$

Άρα δεν είναι ασυμβίβαστα.

www.epignosi.edu.gr

Β5. $A\cap B \subseteq A \Rightarrow P(A\cap B)\le P(A)=\frac{1}{4}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$=\frac{21}{20}-P(A\cup B)\ge\frac{21}{20}-1=\frac{1}{20}$

Θέμα Γ

Γ1. Έστω c το πλάτος των κλάσεων. Τότε η $5^{η}$ κλάση θα είναι [32 , 32+c) και η $6^{η}$ [32+c , 32+2c).

$$x_6=\frac{32+c+32+2c}{2}=38\Leftrightarrow 64+3c=76\Leftrightarrow c=4$$

$f_3\%=\frac{\nu_3}{\nu}\cdot 100\Leftrightarrow \nu_3=\frac{8}{100}\cdot 25=2$ άρα και $\nu_1=2$ επομένως $f_1\%=\frac{2}{25}\cdot 100=8=f_3\%$

$f_2\%=F_2\%-F_1\%=8$. Άρα $\nu_1=\nu_2=2$

$F_3\%=F_2\%+f_2\%=24$

$\nu_5=6\Leftrightarrow f_5\%=\frac{6}{25}\cdot 100=24$ οπότε $F_4\%=F_5\%-f_5\%=88-24=64$

Άρα $f_3\%=F_3\%-F_2\%=64-24=40$ και $\nu_4=25\cdot\frac{40}{100}=10$

Προφανώς $\nu_6=3,\ f_6\%=12$ και $F_6\%=100$

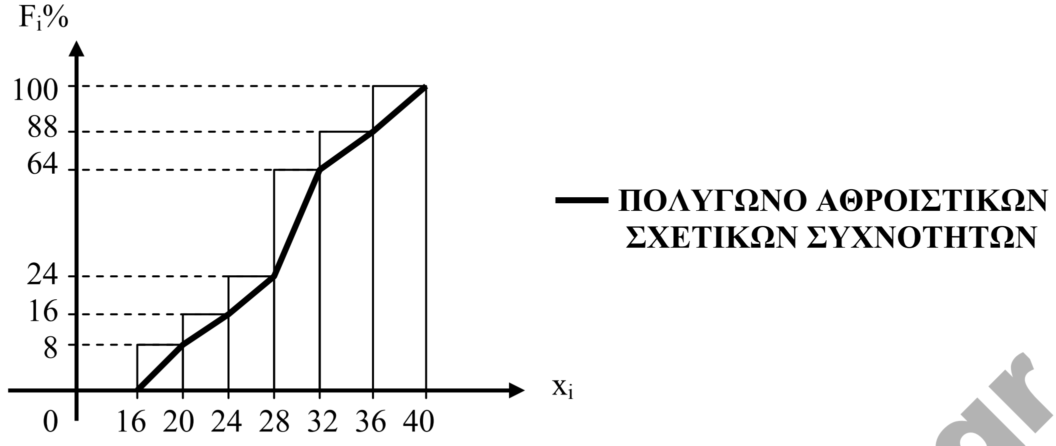
Για την εύρεση των N_i χρησιμοποιούμε τον τύπο $N_i=N_{i-1}+\nu_i$ $i=1,2,...,6$ με $N_1=\nu_1=2$

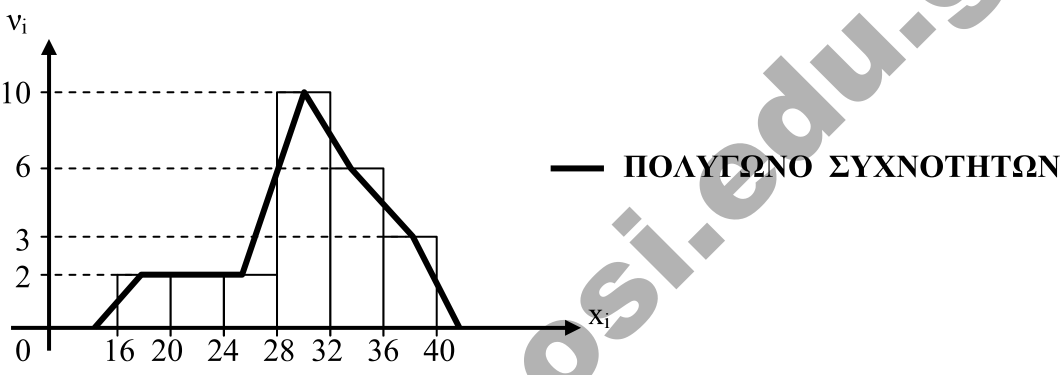
Για την συμπλήρωση της στήλης x_i γνωρίζουμε ότι αν c το πλάτος των κλάσεων τότε:
38 = 22 + 4c ⇔ c = 4.
Η δεύτερη κλάση έχει κεντρική τιμή 22 και πλάτος 4. Άρα είναι η [20 – 24)
Ανάλογα συμπληρώνουμε και τις υπόλοιπες.

Βάρη	x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	$x_i\cdot\nu_i$	$x_i^2\cdot\nu_i$
[16 – 20)	18	2	8	2	8	36	648
[20 – 24)	22	2	8	4	16	44	968
[24 – 26)	26	2	8	6	24	52	1352
[28 – 32)	30	10	40	16	64	300	9000
[32 – 36)	34	6	24	22	88	204	6936
[36 – 40)	38	3	12	25	100	114	4332
Σύνολο	–	ν = 25	100	–	–	750	23236

www.epignosi.edu.gr

Γ2.





Γ3. $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \cdot \nu_i = \frac{750}{25} = 30$

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^{\,2} \cdot \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \cdot \nu_i\right)^2}{\nu}\right\} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^{\,2} \cdot \nu_i}{\nu} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \cdot \nu_i}{\nu}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^{\,2} \cdot \nu_i}{\nu} - \bar{x}^2 =$$

$$= \frac{23236}{25} - 900 = 929,44 - 900 = 29,44 \Leftrightarrow s = \sqrt{29,44} = 5,43$$

Άρα $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5,43}{30} = 0,181 = 18,1\%$.

Γ4. Γνωρίζουμε από εφαρμογή του βιβλίου, ότι η $f(x) = \sum_{i=1}^{\nu}(x_i - x)^2$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της όταν $x = \bar{x}$ Τότε όμως $f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})^2 = \nu s^2 = 25 \cdot 29,44 = 736$

Γ5. Έστω Μ το ενδεχόμενο «το δέμα θεωρείται «μισογεμάτο»» και
Φ το ενδεχόμενο «το δέμα έχει φυσιολογικό βάρος».

$N(M) = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \frac{\nu_4}{2} = 11$.   Άρα $P(M) = \frac{11}{25}$

www.epignosi.edu.gr

$N(\Phi) = \nu_4 + \nu_5 = 16$ Άρα $P(\Phi) = \frac{16}{25}$

$N(M \cap \Phi) = \frac{\nu_4}{2} = 5$, Άρα $P(M \cap \Phi) = \frac{5}{25}$

αφού τα «μισογεμάτα» έχουν βάρος από 1600gr ως 3000gr και τα φυσιολογικά από 2800gr αλλά κάτω από 3600gr , η τομή τους θα είναι το διάστημα

$[2800 - 3000] = [28 - 30] = \frac{\nu_4}{2} = 5$. (Υποθέτοντας πάντα ότι οι τιμές είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στις κλάσεις). Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η

$$P(M \cup \Phi) = P(M) + P(\Phi) - P(M \cap \Phi) = \frac{11}{25} + \frac{16}{25} - \frac{5}{25} = \frac{22}{25}$$

Θέμα Δ

Η συνάρτηση f ορίζεται για $x \geq 0$ και $x \neq P(A)$

Δ1. Έχουμε: $f(x) = \frac{x - 2\sqrt{P(A)x} + P(A)}{[x - P(A)]^2} = \frac{[\sqrt{x} - \sqrt{P(A)}]^2}{[x - P(A)]^2} =$

$$\frac{[\sqrt{x} - \sqrt{P(A)}]^2 \cdot [\sqrt{x} + \sqrt{P(A)}]^2}{[x - P(A)]^2 \cdot [\sqrt{x} + \sqrt{P(A)}]^2}$$

$$= \frac{\left[(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{P(A)}^2\right]^2}{[x - P(A)]^2 \cdot [\sqrt{x} + \sqrt{P(A)}]^2} = \frac{[x - P(A)]^2}{[x - P(A)]^2 \left[\sqrt{x} + \sqrt{P(A)}\right]^2} =$$

$$\frac{1}{\left[\sqrt{x} + \sqrt{P(A)}\right]^2}$$

Οπότε: $L = \lim\limits_{x \to P(A)} f(x) = \lim\limits_{x \to P(A)} \frac{1}{\left[\sqrt{x} + \sqrt{P(A)}\right]^2} =$

$$\frac{1}{\left[\sqrt{P(A)} + \sqrt{P(A)}\right]^2} = \frac{1}{\left[2\sqrt{P(A)}\right]^2} = \frac{1}{4P(A)}$$

Δ2. Είναι $g(x) = L \cdot (x^2 - \ln x) = \frac{1}{4P(A)}(x^2 - \ln x)$

- Η συνάρτηση g ορίζεται για $x > 0$ και είναι:

  $g'(x) = \frac{1}{4P(A)}(2x - \frac{1}{x}) = \frac{1}{4P(A)} \cdot \frac{2x^2 - 1}{x}$, $x > 0$, $P(A) > 0$

  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{\frac{1}{2}}$

www.epignosi.edu.gr

Το πρόσημο της g΄ και η μονοτονία της g φαίνονται στον πίνακα:

x	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
g΄(x)	-	0	+
g(x)	↘		↗

Η συνάρτηση g είναι γν. φθίνουσα στο $(0, \sqrt{\frac{1}{2}}]$ και γν. αύξουσα στο $[\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty)$

και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=\sqrt{\frac{1}{2}}$ το $g(\sqrt{\frac{1}{2}})$ με

$g(\sqrt{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{4P(A)}(\frac{1}{2}-\ln\sqrt{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{4P(A)}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2) = \frac{1}{8P(A)}(1+\ln 2)$, ελάχιστη τιμή.

- Αφού $A\subseteq B \Rightarrow A\cap B = A$, και $P(B\text{-}A) = P(B) - P(A\cap B) \Rightarrow P(B\text{-}A) = P(B) - P(A)$

οπότε για να δείξουμε ότι $\ln\frac{P(B)}{2} - \ln\frac{P(A)}{2} \geq P(B-A)$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\ln\frac{P(B)}{2} - \ln\frac{P(A)}{2} \geq P(B) - P(A) \Leftrightarrow P(A) - \ln\frac{P(A)}{2} \geq P(B) - \ln\frac{P(B)}{2} \quad (1)$$

΄Εχουμε : $A\subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B) \leq 1 \Rightarrow \frac{P(A)}{2} \leq \frac{P(B)}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\sqrt{\frac{P(A)}{2}} \leq \sqrt{\frac{P(B)}{2}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \overset{g:\text{γν.φθίνουσα}}{\Rightarrow} g\left(\sqrt{\frac{P(A)}{2}}\right) \geq g\left(\sqrt{\frac{P(B)}{2}}\right) \Rightarrow$$

$$\cancel{\frac{1}{4P(A)}}\left[\frac{P(A)}{2} - \ln\sqrt{\frac{P(A)}{2}}\right] \geq \cancel{\frac{1}{4P(A)}}\left[\frac{P(B)}{2} - \ln\sqrt{\frac{P(B)}{2}}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{P(A)}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{P(A)}{2} \geq \frac{P(B)}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{P(B)}{2} \Rightarrow \quad P(A) - \ln\frac{P(A)}{2} \geq P(B) - \ln\frac{P(B)}{2}.$$

Δ3. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$ έχει κλίση $\lambda = f'(1)$ (1)

Επειδή όμως η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία :

$2x + 125y = 2005 \Leftrightarrow y = -\frac{27}{125}x + 2005$, με κλίση $\lambda_1 = -\frac{27}{125}$

θα έχουμε ότι $\lambda = \lambda_1 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{27}{125} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f'(1) = -\frac{27}{125} \Leftrightarrow \frac{-1}{\left(1+\sqrt{P(A)}\right)^3} = -\frac{27}{125} \Leftrightarrow$

$$\left(1+\sqrt{P(A)}\right)^3 = \frac{125}{27} \Leftrightarrow 1+\sqrt{P(A)} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \sqrt{P(A)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(A) = \frac{4}{9}$$

www.epignosi.edu.gr