Θέματα

Θέμα 1

Α. Να διατυπώσετε τον ορισμό μιας γνησίως αύξουσας συνάρτησης.

(5 μονάδες)

Β. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

i) Ο βαθμός του υπολοίπου της διαίρεσης P(x) με το x-ρ είναι μηδέν. **Σ** **Λ**

ii) $2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{3} - 1 = \frac{1}{2}$ **Σ** **Λ**

iii) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{5x}{x^2+4}$ είναι περιττή **Σ** **Λ**

iv) Η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f(x) = \alpha^x$ και $g(x) = \alpha^{-x}$, $0 < a \neq 1$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα yy΄. **Σ** **Λ**

v) Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $\frac{e^x-1}{x} > 0$ **Σ** **Λ**

(2 μονάδες/ ερώτημα)

Γ. Να αντιστοιχήσετε τη στήλη Α με κάθε σωστή απάντηση της στήλης Β

Α. $lnx < \frac{1}{3}$	1. $x\epsilon(-\infty, 0)$
Β. $2e^x > 1$	2. $x\epsilon(0, +\infty)$
Γ. $\left(\frac{1}{e}\right)^{x-1} > e$	3. $x\epsilon(-\infty, +\infty)$
Δ. $log_{\frac{1}{3}}(x-2) < log_{\frac{1}{3}}5$	4. $x\epsilon(-\infty, 7)$
Ε. $\left(\frac{3}{2}\right)^x > 1$	5. $x\epsilon(0, \sqrt[3]{e})$

(2 μονάδες/ ερώτημα)

Θέμα 2

Έστω η συνάρτηση $f(x) = -3x^2 + (2k-5)x - 1$ και το σύστημα

(Σ): $\begin{matrix} (\lambda+1)x - (\lambda-1)y = 2\lambda+3 \\ (\lambda-1)x + \lambda y = 2\lambda+1 \end{matrix}$

i) Να υπολογίσετε τις ορίζουσες D, D_x, D_y του συστήματος. **(7 μονάδες)**

ii) Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε λ∈ R και να την προσδιορίσετε. **(5 μονάδες)**

iii) Αν το σημείο (1, 2) ανήκει στη γραφική παράσταση της *f*, να βρείτε το k και να γράψετε τον τύπο της *f*. **(5 μονάδες)**

iv) Εάν η λύση του συστήματος είναι η $(x, y) = (x_1, y_1)$, όπου x_1, y_1 οι συντεταγμένες του ακροτάτου της *f*, να προσδιορίσετε το *λ*. **(8 μονάδες)**

Θέμα 3

Αν το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 17x^2 + 19ax + 3\beta$ έχει παράγοντα το $(x-3)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)$: $(x+1)$ είναι −72,

i. Να βρείτε τους α και β.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $5\eta\mu\theta - \beta = \alpha\sigma\upsilon\nu^2\theta$ στο διάστημα θ$\epsilon[0, 2\pi]$.

iii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η πολυωνυμική συνάρτηση βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x.

Θέμα 4

Δίνεται το πολυώνυμο $Q(x) = (lna \cdot x)^3 - 6x^2 + ln(e^{10} \cdot a) \cdot x - 6$ με $\alpha > 0$ και

και η συνάρτηση $f(x) = (lna - 1)^x$.

A)

i. Αν το $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου Q(x) να βρείτε το α.

ii. Για την τιμή που βρήκατε για το α να λύσετε τις εξισώσεις

$Q(x) = 0$ και $Q(2^x) = 0$.

B) Για $\alpha = \alpha^3$, να λύσετε την εξίσωση $f(ln\varepsilon\varphi x) - 2f(ln\sigma\varphi x) + 1 = 0$, $x\epsilon\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Εύχομαι Επιτυχία!

Απαντήσεις

Θέμα 1

Α) Σχολικό βιβλίο σελ. **31**

Β) **i)** Λ **ii)** Λ **iii)** Σ **iv)** Σ **v)** Σ

Γ)

Α	Β	Γ	Δ	Ε
5	3	1	4	2

Θέμα 2

i)

$$D = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -(\lambda-1) \\ \lambda-1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)+(\lambda-1)^2 = \lambda^2+\lambda+\lambda^2-2\lambda+1 = 2\lambda^2-\lambda+1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2\lambda-3 & -(\lambda-1) \\ 2\lambda+1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(2\lambda-3)+(\lambda-1)(2\lambda+1) = 4\lambda^2-4\lambda-1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 2\lambda-3) \\ \lambda-1 & 2\lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(2\lambda+1)-(\lambda-1)(2\lambda-3) = 8\lambda-2$$

ii) Για το τριώνυμο $2\lambda^2-\lambda+1$ έχουμε:

$$\Delta = (-1)^2-4\cdot 2\cdot 1 = -7 < 0$$

Άρα το τριώνυμο δε μηδενίζεται για κάθε $\lambda \in R$, άρα και το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda \in R$ την (x, y) όπου:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{4\lambda^2-4\lambda-1}{2\lambda^2-\lambda+1}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{8\lambda-2}{2\lambda^2-\lambda+1}$$

iii) Αφού το σημείο (1, 2) ανήκει στη γραφική παράσταση της f έχουμε:

$$f(1) = 2 \Rightarrow$$

$$-3\cdot 1^2+(2k-5)-1 = 2 \Rightarrow$$

$$-3+2k-5-1=2 \Rightarrow$$

$$k=\frac{11}{2}$$

Οπότε $f(x)=-3x^2+6x-1$

iv) Επειδή $f(x)=-3x^2+6x-1$ με $\alpha=-3<0$ η συνάρτηση θα παρουσιάζει μέγιστο με συντεταγμένες:

$$x_1=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{6}{2(-3)}=1 \qquad \text{και} \qquad y_1=-3\cdot 1^2+6\cdot 1-1=2$$

Όμως

- $x=x_1 \Rightarrow \frac{4λ^2-4λ-1}{2λ^2-λ+1}=1 \Rightarrow 4λ^2-4λ-1=2λ^2-λ+1 \Rightarrow 2λ^2-3λ-2=0 \Rightarrow$

  $\lambda=2$ ή $\lambda=-\frac{1}{2}$

- $y=y_1 \Rightarrow \frac{8λ-2}{2λ^2-λ+1}=2 \Rightarrow 4λ^2-2λ+2=8λ-2 \Rightarrow 4λ^2-10λ+4=0 \Rightarrow$

  $\lambda=2$ ή $\lambda=\frac{1}{2}$

Οπότε $\lambda=2$

Θέμα 3

i)

- Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-3)$ ισχύει:

$$P(3)=0 \Rightarrow$$

$$2\cdot 3^3-17\cdot 3^2+19a3+3\beta=0 \Rightarrow$$

$$54-153+57a+3\beta=0 \Rightarrow$$

$$-99+57a+3\beta=0 \Rightarrow$$

$$-33+19a+\beta=0 \ \ (\mathbf{1})$$

- Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$ είναι -72 άρα:

$$P(-1)=-72 \Rightarrow$$

$$2\cdot(-1)^3-17\cdot(-1)^2+19a(-1)+3\beta=-72 \Rightarrow$$

$$-2-17-19\alpha+3\beta=-72 \Rightarrow$$

$$53-19\alpha+3\beta=0 \quad (\mathbf{2})$$

Από (1) + (2) κατά μέλη έχουμε:

$$20+4\beta=0 \Rightarrow \boldsymbol{\beta}=-\mathbf{5}$$

Από (1) έχουμε:

$$-33+19\alpha-5=0 \Rightarrow 19\alpha=38 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}=\mathbf{2}$$

ii) Για α = 2 και β = − 5 έχουμε: $5\eta\mu\theta+5=2\sigma\upsilon\nu^2\theta \Rightarrow$

$$5\eta\mu\theta+5=2(1-\eta\mu^2\theta) \Rightarrow$$

$$5\eta\mu\theta+5=2-2\eta\mu^2\theta \Rightarrow$$

$$2\eta\mu^2\theta+5\eta\mu\theta+3=0 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\theta=-\tfrac{3}{2}\,(\text{απορ.}) \quad \text{ή} \quad \eta\mu\theta=-1\,(\text{δεκτή})$$

Επειδή $\theta\epsilon[0,2\pi]$ έχουμε: $\boldsymbol{\theta}=\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$

iii) Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η πολυωνυμική συνάρτηση βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x θα λύσουμε την ανίσωση $P(x)>0$

Για α = 2 και β = − 5 το πολυώνυμο γίνεται:

$$P(x)=2x^3-17x^2+38x-15$$

Αρχικά θα παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο

Πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου: ±1, ±3, ±5, ±15

Θα κάνουμε Horner για ρ = 3

2	-17	38	-15	**3**
	6	-33	15	
2	-11	5	0	

Το πολυώνυμο γίνεται:

$$P(x)=(x-3)(2x^2-11x+5)$$

Άρα έχουμε την ανίσωση: $P(x)>0 \Rightarrow (x-3)(2x^2-11x+5)>0$

- $x-3=0 \Rightarrow x=3$
- $2x^2-11x+5=0$

$\Delta=(-11)^2-4\cdot 2\cdot 5=121-40=81>0$

$x=\frac{11\pm\sqrt{81}}{4}=\frac{11\pm 9}{4}\Rightarrow x=5$ ή $x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	1/2		3		5		$+\infty$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2-11x+5$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Οπότε $x\epsilon\left(\frac{1}{2},3\right)\cup(5,+\infty)$

Θέμα 4

i. Αφού το $x-1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου Q(x) έχουμε:

$$Q(1)=0\Rightarrow$$

$$(lna\cdot 1)^3-6\cdot 1^2+ln(e^{10}\cdot a)\cdot 1-6=0\Rightarrow$$

$$(lna)^3-6+ln(e^{10}\cdot a)-6=0\Rightarrow$$

$$(lna)^3-6+ln(e^{10})+lna-6=0\Rightarrow$$

$$(lna)^3-6+10+lna-6=0\Rightarrow$$

$$(lna)^3+lna-2=0\quad(1)$$

Θέτουμε $lna=y$ (2)

Η (1) λόγω της (2) γίνεται:

$$y^3+y-2=0\quad(3)$$

Πιθανές ακέραιες ρίζες: $\pm1,\ \pm2$

Κάνουμε Horner για ρ=1

1	0	1	−2	**1**
	1	1	2	
1	1	2	0	

Η (3) γίνεται:

$$(y-1)(y^2+y+2)=0 \;\Rightarrow$$

$$y-1=0 \Rightarrow y=1$$

ή

$y^2+y+2=0\,,\ \Delta=-7$ δεν έχει πραγματικές ρίζες

Για $y=1$ η (2) γίνεται: $lna=1 \Rightarrow \boxed{a=e}$

ii. Για $a=e$ έχουμε: $Q(x)=(lne\cdot x)^3-6x^2+ln(e^{10}\cdot e)\cdot x-6=$
$=x^3-6x^2+ln(e^{11})\cdot x-6 \Rightarrow$

$$Q(x)=x^3-6x^2+11x-6$$

- Λύνουμε την εξίσωση $Q(x)=0 \Rightarrow x^3-6x^2+11x-6=0$ (1)

Πιθανές ακέραιες ρίζες: $\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6$

Κάνουμε Horner για ρ=1

1	−6	11	−6	**1**
	1	−5	−6	
1	−5	6	0	

Η (1) γίνεται:

$$(x-1)(x^2-5x+6)=0 \;\Rightarrow$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

ή

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3$$

- Λύνουμε την εξίσωση: $Q(2^x) = 0 \Rightarrow (2^x)^3 - 6(2^x)^2 + 11 \cdot 2^x - 6 = 0$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $Q(2^x) = 0$ είναι η $Q(x) = 0$ με άγνωστο το 2^x

Οπότε $2^x = 1 \Rightarrow x = 0$

ή

$2^x = 2 \Rightarrow x = 1$

ή

$2^x = 3 \Rightarrow x = log_2 3$

B) Έχουμε $f(x) = (lna - 1)^x$

οπότε η εξίσωση $f(lnεφx) - 2f(lnσφx) + 1 = 0$ γίνεται:

$$(lna - 1)^{lnεφx} - 2(lna - 1)^{lnσφx} + 1 = 0 \quad \text{(I)}$$

Για $α = α^3 = e^3$ η (I) γίνεται: $(lne^3 - 1)^{lnεφx} - 2(lne^3 - 1)^{lnσφx} + 1 = 0 \Rightarrow$

$$(3-1)^{lnεφx} - 2(3-1)^{ln\frac{1}{εφx}} + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2^{lnεφx} - 2 \cdot 2^{ln\frac{1}{εφx}} + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2^{lnεφx} - 2 \cdot 2^{-lnεφx} + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(2^{lnεφx})^2 - 2 + 2^{lnεφx} = 0 \quad \text{(II)}$$

Θέτουμε $2^{lnεφx} = y > 0$ (III)

Άρα η (II) γίνεται: $y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1\ (δεκτή)$ ή $y = -2\ (απορ.)$

Για $y = 2$ από (III) έχουμε: $2^{lnεφx} = 1 \Rightarrow lnεφx = 0 \Rightarrow$

$$εφx = 1 \Rightarrow x = \frac{π}{4} \text{ , αφού } x ε \left(0, \frac{π}{2}\right)$$