Θέματα

Θέμα 1

Α. Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω, ισχύει $P(A\text{-}B)=P(A)-P(A\cap B)$ **(10 μονάδες)**

Β. Είναι **Σωστή** ή **Λάθος** καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ;

α. Αν $A=\dfrac{x}{x(x-1)}+\sqrt{x}$, τότε η παράσταση ορίζεται για $x\neq 0$ και $x\neq 1$ **Σ Λ**

β. Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\Delta\geq 0$ έχει δύο ρίζες άνισες **Σ Λ**

γ. Για την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ ισχύει ότι :

$S=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $P=\dfrac{\gamma}{\alpha}$ **Σ Λ**

δ. Αν $\alpha=\beta$, τότε $|\alpha-\beta|=|\alpha|-|\beta|$ **Σ Λ**

ε. Η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ για $\alpha=0$ και $\beta=0$ είναι αόριστη. **Σ Λ**

(3 μονάδες/ερώτημα)

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{\sqrt{(5x-1)(3x-2)}}{2-|x|}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να υπολογίσετε το $f(1)$

(8 μονάδες)

β) Να λυθεί η εξίσωση $\lambda^2 x-\lambda=x-1$ **(1)** για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$

(8 μονάδες)

γ) Να λυθεί η εξίσωση: $\lambda(x-1)^2-|x-1|-f(1)=0$ όταν η εξίσωση **(1)** είναι ταυτότητα. **(9 μονάδες)**

Θέμα 3

Σε ένα σχολείο που έχει 120 μαθητές, θα πάνε στην εκδρομή οι 80 μαθητές. Από τους μαθητές του σχολείου 70 μαθητές είναι καλοί στα Μαθηματικά, 30 μαθητές είναι καλοί στα Αρχαία και 20 μαθητές είναι καλοί και στα δυο παραπάνω μαθήματα.

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α. να μην πάνε στην εκδρομή **(6 μονάδες)**

Β. να είναι καλοί τουλάχιστον σε ένα από τα παραπάνω μαθήματα **(6 μονάδες)**

Γ. να μην είναι καλοί ούτε στα Μαθηματικά ούτε στα Αρχαία **(7 μονάδες)**

Δ. να είναι καλοί μόνο στα Μαθηματικά **(6 μονάδες)**

Θέμα 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-(2\lambda+1)x+\lambda-2=0$ **(1)**

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. **(5 μονάδες)**

β. Αν $\lambda \in (3,+\infty)$ να δείξετε ότι η (1) δεν έχει ρίζες αντίστροφες. **(6 μονάδες)**

γ. Να βρείτε το λ ώστε οι αριθμοί x_1+x_2, λ, x_1x_2 να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. **(6 μονάδες)**

δ. Να βρείτε το λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύουν συγχρόνως:

$$x_1+x_2=x_1^2+x_2^2-13 \text{ και } 5x_1^3+5x_2^3>10$$ **(8 μονάδες)**

Ευχόμαστε Επιτυχία!

Απαντήσεις

Θέμα 1

Α. Σχολικό βιβλίο σελ:34

Β. **α – Λ , β – Λ, γ – Σ, δ – Σ, ε – Σ**

Θέμα 2

α) Θα πρέπει το υπόριζο του αριθμητή να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός και ο παρανομαστής διάφορος από το μηδέν. Δηλαδή:

$$\begin{cases}(5x-1)(3x-2)\geq 0\\ 2-|x|\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}15x^2-10x-3x+2\geq 0\\ |x|\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}15x^2-13x+2\geq 0\\ x\neq 2 \text{ και } x\neq -2\end{cases}\quad (1)$$

Το τριώνυμο $15x^2-13x+2=0$ έχει $\alpha=15, \beta=-13$ και $\gamma=2$.

Επομένως η διακρίνουσα είναι:

$$\Delta:\beta^2-4\alpha\gamma=13^2-4\cdot 15\cdot 2=169-120=49$$

Και οι ρίζες x_1, x_2 είναι:

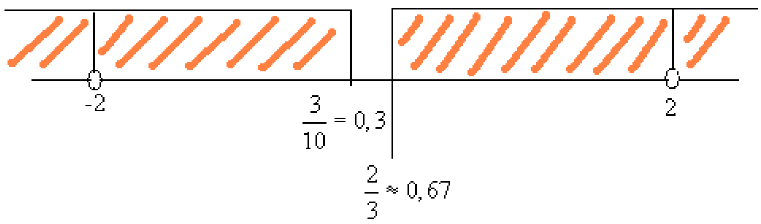
$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{13+7}{30}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3},\quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{13-7}{30}=\frac{6}{30}=\frac{3}{10}$$

Άρα το τριώνυμο γράφεται: $15x^2-13x+2=15\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{3}{10}\right)$

Συνεπώς, οι σχέσεις (1) δίνουν:

$$\begin{cases}15x^2-13x+2\geq 0\\ x\neq 2 \text{ και } x\neq -2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}15\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{3}{10}\right)\geq 0\\ x\neq 2 \text{ και } x\neq -2\end{cases}\overset{\substack{\text{Πρόσημο}\\ \text{Τριωνύμου:}\\ \text{Εκτός των Ριζών}\\ \text{ομόσημο του α,}\\ \text{δηλαδή +}}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x\leq\frac{2}{3} \text{ ή } x\geq\frac{3}{10}\\ x\neq 2 \text{ και } x\neq -2\end{cases}$$

Σχηματικά:



Άρα το πεδίο ορισμού της δοθείσας συνάρτησης είναι:

$$x \in (-\infty,-2)\cup\left(-2,\frac{3}{10}\right)\cup\left(\frac{2}{3},2\right)\cup(2,+\infty)$$

Για να υπολογίσουμε το $f(1)$ αντικαθιστούμε στη συνάρτηση f όπου $x=1$. Είναι αναλυτικά:

$$f(x)=\frac{\sqrt{(5x-1)(3x-2)}}{2-|x|}\overset{x=1}{\Leftrightarrow} f(1)=\frac{\sqrt{(5\cdot 1-1)(3\cdot 1-2)}}{2-|1|}\Leftrightarrow f(1)=\frac{\sqrt{(5-1)(3-2)}}{2-1}\Leftrightarrow$$

$$f(1)=\frac{\sqrt{4\cdot 1}}{1}\Leftrightarrow f(1)=\sqrt{4}\Leftrightarrow f(1)=2$$

$$\lambda^2 x-\lambda=x-1\Leftrightarrow(\lambda^2-1)x=\lambda-1\Leftrightarrow(\lambda-1)(\lambda+1)x=\lambda-1\ \ (2)$$

$\text{Αν}\,(\lambda-1)(\lambda+1)\neq 0\Leftrightarrow \lambda\neq 1\,\text{και}\,\lambda\neq -1\,\text{τότε η}\,(2)\,\text{έχει μοναδική λύση}$

β) $x=\dfrac{\lambda-1}{(\lambda-1)(\lambda+1)}=\dfrac{1}{(\lambda+1)}$

$\text{Αν}\,\lambda=1\,\text{τότε}\,(2)\Leftrightarrow 0x=0\,\text{ταυτότητα}$

$\text{Αν}\,\lambda=-1\,\text{τότε}\,(2)\Leftrightarrow 0x=-2\,\text{αδύνατη}$

γ) Είναι:

$$(x-1)^2-|x-1|-f(1)=0\ \overset{\substack{\text{Γνωρίζουμε ότι:}\\ |x|^2=x^2}}{\Leftrightarrow}\ |x-1|^2-|x-1|-f(1)=0\ \overset{\substack{\text{Θέτουμε}\\ |x-1|=\omega}}{\Leftrightarrow}\ \omega^2-\omega-f(1)=0\ \overset{f(1)=2}{\Leftrightarrow}\ \omega^2-\omega-2=0$$

Το τριώνυμο $\omega^2-\omega-2=0$ έχει $\alpha=1,\beta=-1$ και $\gamma=-2$.

Επομένως η διακρίνουσα είναι:

$$\Delta:\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9$$

Και οι ρίζες ω_1, ω_2 είναι:

$$\omega_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2,\ \ \omega_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

Για $\omega_1=2$ έχουμε: $|x-1|=2 \Leftrightarrow x-1=2$ ή $x-1=-2 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=-1$

Για $\omega_2=-1$ έχουμε: $|x-1|=-1$ που είναι άτοπο

Συνεπώς, $x=3$ ή $x=-1$

Θέμα 3

Ο δειγματικός χώρος Ω είναι τα 120 παιδιά. Άρα N(Ω) = 120
Έστω Ε το ενδεχόμενο να πάνε τα παιδιά στην εκδρομή. Άρα N(E) = 80
Έστω Μ το ενδεχόμενο τα παιδιά να είναι καλοί στα Μαθηματικά. Άρα N(M) = 70
Έστω Α το ενδεχόμενο τα παιδιά να είναι καλοί στα Αρχαία. Άρα N(A) = 30
Και εφόσον 20 μαθητές είναι καλοί και στα δυο μαθήματα έχουμε N(A∩M) = 20

Α. $P(E')=1-P(E)=1-\frac{N(E)}{N(\Omega)}=1-\frac{80}{120}=\frac{40}{120}=\frac{1}{3}$

Β. $P(A\cup M)=P(A)+P(M)-P(A\cap M)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(M)}{N(\Omega)}-\frac{N(A\cap M)}{N(\Omega)}=\frac{70}{120}+\frac{30}{120}-\frac{20}{120}=\frac{80}{120}=\frac{2}{3}$

Γ. $P[(A\cup M)']=1-P(A\cup M)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

Δ. $P(M-A)=P(M)-P(A\cap M)=\frac{70}{120}-\frac{20}{120}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$

Θέμα 4

α. $x^2-(2\lambda+1)x+\lambda-2=0$ Είναι $\alpha=1$, $\beta=-(2\lambda+1)$, $\gamma=\lambda-2$
Άρα $\Delta=[-(2\lambda+1)]^2-4(\lambda-2)=4\lambda^2+4\lambda+1-4\lambda+8=4\lambda^2+9>0$ για κάθε $\lambda\in R$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε $\lambda\in R$.

β. Για να έχει η εξίσωση δύο ρίζες αντίστροφες θα πρέπει το γινόμενό τους να ισούται με 1,δηλ. $P=1\Rightarrow\frac{\gamma}{\alpha}=1\Rightarrow\lambda-2=1\Rightarrow\lambda=3$ άτοπο διότι $\lambda\in(3,+\infty)$
Άρα η (1) δεν έχει ρίζες αντίστροφες αν $\lambda\in(3,+\infty)$.

γ. Αφού x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης (1) έχουμε:
$x_1+x_2=2\lambda+1$ και $x_1\cdot x_2=\lambda-2$

Θα πρέπει να ισχύει $2\lambda=x_1+x_2+x_1x_2 \Leftrightarrow 2\lambda=2\lambda+1+\lambda-2 \Leftrightarrow \lambda=1$

δ. Αφού x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης (1) έχουμε:

$$x_1 + x_2 = 2\lambda + 1 \quad \text{και} \quad x_1 \cdot x_2 = \lambda - 2$$

Άρα από τη σχέση που μας δίνεται έχουμε:

$$x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2 - 13 \Rightarrow x_1 + x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 13 \Rightarrow$$

$$2\lambda + 1 = (2\lambda + 1)^2 - 2(\lambda - 2) - 13 \Rightarrow 2\lambda + 1 = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 - 2\lambda + 4 - 13 \Rightarrow$$

$$4\lambda^2 = 9 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{3}{2} \qquad (1)$$

Από τη σχέση που μας δίνεται έχουμε:

$$5x_1^3 + 5x_2^3 > 0 \Rightarrow 5(x_1^3 + x_2^3) > 0 \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 > 0 \Rightarrow$$

$$(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) > 0 \Rightarrow (2\lambda + 1)(4\lambda^2 + 2\lambda + 5 - \lambda + 2) > 0 \Rightarrow$$

$$(2\lambda + 1)(4\lambda^2 + \lambda + 7) > 0$$

Όμως $4\lambda^2 + \lambda + 7 > 0$ διότι $\Delta < 0$ και $\alpha = 4 > 0$

Άρα θα πρέπει: $2\lambda + 1 > 0 \Rightarrow \lambda > -\frac{1}{2}$ (2)

Τελικά από (1) και (2) έχουμε $\lambda = \frac{3}{2}$