ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n} = (A, B)$ και παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ **(μονάδες 6)**

Β) Να απαντήσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) στις παρακάτω ερωτήσεις:

Ι) Η εξίσωση $y - 5 = \lambda\,(x + 2)$, $\lambda \in R$ παριστάνει για τις διάφορες τιμές του λ όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο Α(-2,5). **(μονάδες 2)**

ΙΙ) Η εξίσωση $(\alpha - 1)\,x + (\alpha^2 - 3\alpha + 2)\,y + 3 = 0$, $\alpha \in R$ παριστάνει πάντοτε ευθεία.
(μονάδες 2)

ΙΙΙ) Η ευθεία $-3\,x + 5\,y + 2 = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (5,3)$.
(μονάδες 2)

Γ) Να γράψετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση στις παρακάτω ερωτήσεις :

Ι) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α(1,2) και είναι κάθετη στην ευθεία $x + 2\,y + 5 = 0$ έχει εξίσωση :

Α. $y = 2x - 4$ Β. $y = -\frac{1}{2}x$ Γ. $y - 2 = \frac{1}{2}(x-1)$ Δ. $y = 2x$ **(μονάδες 4)**

ΙΙ) Ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Μ(3λ+1, 2λ+3), $\lambda \in R$ είναι η ευθεία με εξίσωση :

Α. $y = 2x + 3$ Β. $x = 3y + 1$ Γ. $2x - 3y + 7 = 0$ Δ. $y = x+2$
(μονάδες 4)

ΙΙΙ) Το τρίγωνο που σχηματίζουν οι ευθείες $y = x$, $y = -x$ και $x = -1$ έχει εμβαδό :

Α. $\frac{1}{2}$ Β. 1 Γ. 2 Δ. 4 **(μονάδες 5)**

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Δίνονται τα σημεία Α(14,5) και Β(2,-1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Α και Β είναι : $x - 2y - 4 = 0$ **(μονάδες 13)**

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x΄x, y΄y στα σημεία Κ(4,0) και Λ(0,-2) αντιστοίχως. **(μονάδες 12)**

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

Δίνεται η εξίσωση : $2x^2 - 2y^2 - 3xy + 3x + 4y - 2 = 0$

α) Να δείξετε ότι παριστάνει δύο ευθείες. **(μονάδες 8)**

β) Να δείξετε ότι οι προηγούμενες ευθείες είναι μεταξύ τους κάθετες και να βρεθεί το σημείο τομής τους. **(μονάδες 8)**

γ) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(\beta-1, \alpha+1)$ με $\alpha,\beta \in R$ αν το σημείο $P(\alpha,\beta)$ ανήκει στην ευθεία $x + y - 2 = 0$. **(μονάδες 9)**

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση : $(3\alpha + 1)x + (1 - 5\alpha)y + 10\alpha - 2 = 0$, $\alpha \in R$ παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή της παραμέτρου α. Ακόμη να δειχθεί ότι όλες οι παραπάνω ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο και να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου αυτού.

(μονάδες 8)

Β) Να βρεθεί η τιμή του α ώστε η παραπάνω ευθεία να είναι :

Ι) κάθετη στον άξονα x′x. **(μονάδες 4)**

ΙΙ) παράλληλη με την ευθεία $y = -2x + 2013$. **(μονάδες 4)**

Γ) Για $\alpha = -1$, να βρεθούν τα σημεία Α,Β της τομής της ευθείας του ερωτήματος Α) με τους άξονες x′x και y′y αντίστοιχα και να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ (Ο η αρχή των αξόνων) είναι **6 τ.μ.** **(μονάδες 5)**

Δ) Για $\alpha=2$ να βρεθεί η απόσταση του σημείου Ν(-3,4) από την ευθεία του ερωτήματος Α) **(μονάδες 4)**

ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α) θεωρία σελ 67

Β) Ι) Σ ΙΙ) Λ ΙΙΙ) Σ

Γ) Ι) Δ ΙΙ) Γ ΙΙΙ) Β

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α) Η ευθεία διέρχεται από το γνωστό σημείο Α(14,5) αρα : **ψ-5=λ(χ-14)** (1) και εχει

$\lambda_{AB}=\dfrac{-1-5}{2-14}=\dfrac{1}{2}$ δηλ η (1) γίνεται: **ψ-5=$\frac{1}{2}$(χ-14)** $\Leftrightarrow$ **2ψ-10=χ-14** $\Leftrightarrow$ **χ-2ψ-4=0**

Β) για να βρω που τέμνει τον άξονα χχ' θέτω ψ=0 δηλ χ=4 αρα τον τέμνει στο Κ(4,0)
για να βρω που τέμνει τον άξονα ψψ' θέτω χ=0 δηλ ψ=-2 αρα τον τέμνει στο Λ(0,-2)

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

α) Θεωρώ την εξίσωση τριώνυμο ως προς x δηλαδή $2x^2+(3-3y)x-2y^2+4y-2=0$ (1) και την παραγοντοποιώ.

$\Delta=(3-3y)^2-4\cdot 2(-2y^2+4y-2)=(5y-5)^2$

$x_{1,2}=\dfrac{-(3-3y)\pm(5y-5)}{4}$ *δηλ* $x_1=2y-2$ ή $x_2=-\dfrac{y}{2}+\dfrac{1}{2}$

$(1)\Leftrightarrow 2(x-2y+2)\left(x+\dfrac{y}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow x-2y+2=0\ \ (\varepsilon_1)$ ή $x+\dfrac{y}{2}-\dfrac{1}{2}=0\Leftrightarrow 2x+y-1=0\ \ (\varepsilon_2)$

β) Έχουμε $\lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{\varepsilon_2}=\dfrac{1}{2}\cdot(-2)=-1$ άρα $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2$

Λύνουμε το σύστημα : $\left\{\begin{matrix} x-2y=2=0 \\ 2x+y-1=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} -2x+4y-4=0 \\ 2x+y-1=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} 5y-5=0 \\ 2x+y-1=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} y=1 \\ x=0\end{matrix}\right.$

Άρα τέμνονται στο Σ(0,1).

γ) Εφόσον το Ρ(α,β) ανήκει στην ευθεία $x+y-2=0$ οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν δηλ.

$\alpha+\beta-2=0 \Leftrightarrow \alpha=2-\beta$ άρα $\mathrm{M}(\beta\text{-}1, 2\text{-}\beta+1)$ $\delta\eta\lambda.$ $\mathrm{M}(\beta\text{-}1, 3\text{-}\beta)$

Θέτουμε x την τετμημένη, y την τεταγμένη και κάνουμε απαλοιφή της παραμέτρου β

$$\left.\begin{matrix} x=\beta-1 \\ y=3-\beta \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} x+y=2 \Leftrightarrow x+y-2=0$$

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Α) Η εξίσωση δεν παριστάνει ευθεία όταν συγχρόνως $\begin{cases} 3\alpha+1=0 \\ 1-5\alpha=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-\dfrac{1}{3} \\ \alpha=\dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$ αδύνατο (δεν υπάρχει κοινή λύση) άρα για κάθε $\alpha \in R$ παριστάνει ευθεία.

Θεωρώ την εξίσωση ως προς την παράμετρο α δηλ. $3\alpha x+x+y-5\alpha y+10\alpha-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3x-5y+10)\alpha+(x+y-2)=0$. Η τελευταία είναι αόριστη ως προς α άρα :

$$\left\{\begin{matrix} 3x-5y+10=0 \\ x+y-2=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 3x-5y+10=0 \\ 5x+5y-10=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$$

Άρα όλες διέρχονται από το σημείο Σ(0,2) .

Β) Ι) για να είναι κάθετη στον xx' πρέπει να έχει την μορφή

$x=c \quad \delta\eta\lambda.\ 1\text{-}5\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{1}{5}$

ΙΙ) για να είναι παράλληλη στην $y=-2x+2013$ πρέπει : $-\dfrac{3\alpha+1}{1-5\alpha}=(-2) \Leftrightarrow 3\alpha+1=2-10\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 13\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{1}{13}$

Γ) για $\alpha = -1$ έχουμε : $-2x+6y-12=0 \Leftrightarrow x-3y+6=0$ τέμνει xx' στο Α(– 6 ,0) και yy' στο Β(0,2) άρα $(AOB)=\dfrac{1}{2}|-6|\cdot|2|=6$ τ.μ.

Δ) για $\alpha=2$ έχουμε : $7x-9y+18=0$ (ε) Ν(– 3,4)

$$d(\mathrm{N},\varepsilon)=\frac{|7(-3)-9\cdot 4+18|}{\sqrt{7^2+(-9)^2}}=\frac{|-21-36+18|}{\sqrt{49+18}}=\frac{39}{\sqrt{130}}$$