ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. α) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι, αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ. **(μονάδες 10)**

β) Αν $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τι συμπεραίνετε για τον τύπο της f **(μονάδες 4)**

Β. α) Για τη συνάρτηση f ισχύουν : $f''(x) - f(x) = 0$ για κάθε $x \in R$ και $f(0) = f'(0)$.
Να αποδείξετε ότι :

Ι) Η συνάρτηση $g(x) = [f(x)]^2 - [f'(x)]^2 + 2014$ είναι σταθερή **(μονάδες 3)**

ΙΙ) $g(x) = 2014$, για κάθε $x \in R$. **(μονάδες 2)**

β) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ**

Ι) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε αυτό, τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$. **(μονάδες 2)**

ΙΙ) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, τότε τα σημεία Α(1,2) και Β(2, - 4) ανήκουν και τα δύο στη γραφική παράσταση της f. **(μονάδες 2)**

ΙΙΙ) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ. **(μονάδες 2)**

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3x} - 1}{x} & x \neq 0 \\ \alpha & x = 0 \end{cases}$

Να δείξετε ότι :

α) $\alpha = 3$ **(μονάδες 7)**

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο R. **(μονάδες 8)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$ με $x > 0$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(μονάδες 5)**

β) Δείξετε ότι $f(x) \leq 1$ για κάθε $x > 0$. **(μονάδες 5)**

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

Α. ***α)*** Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $(f'(x))^2 - f'(x) = (x+1)\cdot e^{-x} + x$, για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν παρουσιάζει σημείο καμπής. **(μονάδες 6)**

β) Έστω f παραγωγίσιμη στο [α,β] και f ′,f ′′ συνεχής στο [α,β] με $f'(\alpha) < c < f'(\beta)$
Αν $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x) = c$ έχει μία μόνο ρίζα στο (α,β). **(μονάδες 6)**

Β. ***α)*** Αν f παραγωγίσιμη στο R, $f(0) = 5$ και για κάθε $x \in R$ ισχύει:
$f(x) + x^2 + x + \text{συν}x \leq 6$ να βρείτε την εφαπτομενη της f στο χ=0 **(μονάδες 6)**

β) Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α,β]. Έστω m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f στο [α,β]. Αν ισχύει: $m < f(\alpha) < f(\beta) < M$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β)
(μονάδες 7)

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to R$ για την οποία ισχύουν:

- $x^2 f''(x) + 5xf'(x) + 4f(x) = 0$ για κάθε $x > 0$,
- $f(1) = 1$ και $f'(1) = -3$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 f(x) + \ln x, \ x > 0$ είναι σταθερή. **(μονάδες 8)**

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f. **(μονάδες 2)**

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. **(μονάδες 4)**

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. **(μονάδες 3)**

ε) Να αποδείξετε ότι αν $0 < \alpha < \beta < 2$, τότε ισχύει:
$f(\beta)(\alpha^2\beta - \alpha\beta^2) > \beta\ln\alpha - \alpha\ln\beta > f(\alpha)(\alpha^2\beta - \alpha\beta^2)$ **(μονάδες 8)**

ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. α) Θεωρια βιβλιο σελ 23

β) f(x)=c

Β.α) $g'(x) = 2f(x).f'(x) - 2f'(x).f''(x) = 2f'(x)(f(x) - f''(x)) = 0$ αρα g(x)=c

Για χ=0 εχω g(0)=2014 ara g(x)=2014

β) Λ,Λ,Σ

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α.α) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3e^{3x}}{1} = 3 \qquad f(0) = a \qquad \alpha\rho\alpha \quad a = 3$

β) Η f παραγωγίσιμη για χ≠0 ως πηλίκο

για χ=0: $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{e^{3x}-1}{x} - 3}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1-3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3e^{3x}-3}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9e^{3x}}{2} = \dfrac{9}{2}$

αρα f παραγωγίσιμη στο R

Β. α) $f'(x) = \dfrac{1-(1+\ln x)}{x^2} = \dfrac{-\ln x}{x^2} \qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

X	0	1	$+\infty$
f΄(x)	+		-
f(x)	↗	ολ.με	↘

στη θεση χ=1 παρουσιαζει ολικο μεγιστο f(1)=1

β) αρα $f(x) \le f(1) \Leftrightarrow f(x) \le 1$ για κάθε χ>0

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

Α. α)Εστω ότι η f παρουσιαζει σημείο καμπής $(x_0, f(x_0))$.Τοτε $f''(x_0)=0$.Παραγωγίζω:

$2f'(x).f''(x) - f''(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} + 1$ για $x=x_0$ εχουμε $0 = e^{-x_0} - e^{-x_0} - x_0 e^{-x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0 e^{-x_0} = 1$

δηλ : $x_0 = e^{x_0}$ (1) Όμως η ψ=χ και η ψ=e^x δεν εχουν κανένα κοινό σημείο αρα η (1) είναι αδύνατη αρα η f δεν εχει σημεία καμπής.

β) Θεωρώ g(x)=f΄(x)-c σχς στο [α,β] ως διαφορά συνεχων.

$\begin{cases} g(\alpha) = f'(\alpha) - c < 0 \\ g(\beta) = f'(\beta) - c > 0 \end{cases} \Rightarrow g(\alpha)g(\beta) < 0$ αρα ισχύει το Θ.Bolzano δηλ υπαρχει 1 τουλάχιστον ριζα της g(x)=0 στο (α,β) . Επίσης g΄(x)=f΄΄(x)≠0 και f΄΄(x) συνεχής αρα διατηρει πρόσημο δηλ η g΄(x) είναι γν.μονότονη και η ρίζα είναι μοναδική

Β. α) Εχω: $f(x) + x^2 + x + \sigma\upsilon\nu x - 6 \le 0$ (1) Θεωρώ $h(x) = f(x) + x^2 + x + \sigma\upsilon\nu x - 6$ και εχω h(0)=0 αρα η (1) γινεται h(x) ≤ h(0) για κάθε χ στο R δηλ στη θέση χ=0 εσωτερικό σημείο η h παρουσιάζει ακρότατο είναι πργμ δηλ από θεώρημα Fermat h΄(0)=0.

Όμως $h'(x) = f'(x) + 2x + 1 - \eta\mu\chi \quad \alpha\rho\alpha \quad h'(0) = f'(0) + 1 \Leftrightarrow 0 = f'(0) + 1 \Leftrightarrow f'(0) = -1$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:ψ-f(0)=f΄(0)(x-0) δηλ ψ-5=-χ αρα ψ=-χ+5

β)Επειδη η f είναι συνεχής στο [α,β] εχει μέγιστη Μ και ελάχιστη m τιμή .Απο την σχέση $m < f(\alpha) < f(\beta) < M$ αποκλείεται τα ακρα α,β να είναι θέσεις ακροτάτων αρα εχει εσωτερικά σημεία που είναι θέσεις ακροτάτων εστω χ_1,χ_2.Απο θ.Fermat $f'(x_1)=f'(x_2)=0$
Στο $[\chi_1,\chi_2]$ η f είναι πργμ και σχς και $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.Αρα ισχύει το Θ.Rolle αρα η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(\chi_1,\chi_2) \subseteq (\alpha,\beta)$

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

α) $g'(x) = 2xf(x) + x^2.f'(x) + \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x.g'(x) = 2x^2 f(x) + x^3 f'(x) + 1 \quad (2)$ αρα

$(x.g'(x))' = 4xf(x) + 2x^2 f'(x) + 3x^2 f'(x) = x^3 f''(x) \Leftrightarrow (x.g'(x))' = x.(4f(x) + 5xf'(x) + x^2 f''(x)) = 0$

Δηλ $\chi.g'(x)=c$ (1) για x=1 εχω $g'(1)=c$ αρα c =0 από (2)

Αρα από (1) εχω $g'(x)=0$ δηλ g(x) σταθερη

β) εχω $c = x^2 f(x) + \ln x$ και για χ=1 εχω c=1 αρα $1 = x^2 f(x) + \ln x \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

γ) στο (0,+∞) εχουμε:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\ln x}{x^2} = \dfrac{+\infty}{0^+} = +\infty$ *αρα* $\chi = 0$ *κατακορυφη ασυμπτωτη*

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1-\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{-1}{\chi}}{2\chi} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-1}{2\chi^2} = \dfrac{-1}{+\infty} = 0$ αρα ψ=0 οριζόντια ασυμπτωτη στο +∞

δ) εχω $f'(x) = \dfrac{-x-(1-\ln x).2x}{x^4} = \dfrac{2x.\ln x - 3x}{x^4} = \dfrac{x(2\ln x - 3)}{x^4}$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow x = e^{3/2}$

X	0 2 $e^{3/2}$	+∞
f'(x)	-	+
f(x)	↘	↗
	ολ.ε	

στη θεση $x = e^{3/2}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο $f(e^{3/2}) = \dfrac{-1}{2e^3}$ Για το σύνολο τιμών εχουμε:

$x \in (0, e^{3/2}] \Rightarrow f(x) \in [f(e^{3/2}), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)) = [\dfrac{-1}{2e^3}, +\infty)$

$x \in [e^{3/2}, +\infty) \Rightarrow f(x) \in [f(e^{3/2}), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)) = [\dfrac{-1}{2e^3}, 0)$ ενωνοντας τα δυο σύνολα εχουμε ότι

$f(A) = [\dfrac{-1}{2e^3}, +\infty)$

ε) η σχέση διαιρωντας με αβ γίνεται: $f(\beta)(\alpha-\beta) > \frac{\ln\alpha}{\alpha} - \frac{\ln\beta}{\beta} > f(\alpha)(\alpha-\beta)$ δηλ:

$$f(\beta) < \frac{\frac{\ln\alpha}{\alpha} - \frac{\ln\beta}{\beta}}{a-\beta} < f(\alpha) \quad (1) \qquad \gamma\iota\alpha\tau\iota \quad a-\beta<0$$

Με Θ.Μ.Τ για την $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ στο [α,β] υπαρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$: $h'(\xi) = \frac{\frac{\ln\alpha}{\alpha} - \frac{\ln\beta}{\beta}}{a-\beta}$ (2)

Όμως $h'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} = f(x)$ (3)

Από (1),(2),(3) θελω να δειξω : $f(\beta) < f(\xi) < f(\alpha)$

Όμως στο (0,2) η f είναι γν. φθίνουσα αρα: με α<ξ<β επεται $f(\alpha) > f(\xi) > f(\beta)$