Επαναληπτικό Διαγώνισμα Γεωμετρίας Β Λυκείου

Θέμα 1

Α. Να υπολογίσετε την πλευρά λ_4 και το απόστημα α_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο, R) συναρτήσει της ακτίνας R

(10 Μονάδες)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Σ** (Σωστό) ή **Λ** (Λάθος) δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η γωνία φ_ν και η κεντρική γωνία ω_ν ενός κανονικού ν-γώνου είναι συμπληρωματικές **Σ Λ**

β. Αν ΑΔ ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($Α=90^0$), τότε $\dfrac{\beta^2}{\gamma^2}=\dfrac{ΔΓ}{ΔΒ}$ **Σ Λ**

γ. Αν δυο τρίγωνα είναι ισοδύναμα, τότε είναι ίσα **Σ Λ**

δ. Το εμβαδόν ενός ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του **Σ Λ**

ε. Αν είναι $Β > 90^0$ τότε $\alpha^2 + \gamma^2 > \beta^2$ **Σ Λ**

στ. Ένα σημείο Ρ είναι εσωτερικό σημείο κύκλου (Ο, R) αν και μόνο αν $\Delta^{Ρ}_{(Ο,R)} < 0$ **Σ Λ**

ζ. Το εμβαδόν εγγεγραμμένου τριγώνου σε κύκλο (Ο, ρ) δίνεται από τον τύπο $Ε = \tau\rho$ **Σ Λ**

η. Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας **Σ Λ**

θ. Το εμβαδόν τετραγώνου με διαγώνιο δ, δίνεται από τον τύπο $Ε = 2\delta^2$ **Σ Λ**

ι. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $Β = 120^0$, τότε θα είναι $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + \alpha\gamma$ **Σ Λ**

(1,5 Μονάδα ανά ερώτημα)

Θέμα 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 12 cm, ΒΓ = 16 cm και $B = 60^0$

Α. Να βρείτε την πλευρά ΑΓ *(4 Μονάδες)*

Β. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες *(4 Μονάδες)*

Γ. Να βρείτε την προβολή της ΑΒ πάνω στην ΒΓ *(4 Μονάδες)*

Δ. Να βρείτε την διάμεσο ΒΜ *(4 Μονάδες)*

Ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ *(4 Μονάδες)*

ΣΤ. Αν Δ σημείο της ΑΒ τέτοιο ώστε $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και Ε σημείο της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε $BE = \frac{1}{4}B\Gamma$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΕ. *(5 Μονάδες)*

Θέμα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γ = 1, β = $\sqrt{5}$ και α = $\sqrt{8}$

Α. Να δείξετε ότι το ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο τρίγωνο *(6 Μονάδες)*

Β. Αν Μ το μέσον της ΒΓ, να υπολογίσετε το μήκος της ΑΜ *(6 Μονάδες)*

Φέρνουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του ΑΒΓ και η προέκταση της ΑΜ τέμνει τον κύκλο στο Δ.

Γ. Να υπολογίσετε το μήκος ΜΔ *(6 Μονάδες)*

Δ. Να αποδείξετε οτι η ΒΔ είναι διάμετρος *(7 Μονάδες)*

Θέμα 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με εμβαδόν 96 $\sqrt{3}$ και γωνία $A = 60^0$. Αν ο εγγεγραμμένος στο τραπέζιο ΑΒΓΔ κύκλος (Ο, R) εφάπτεται στις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΑΔ στα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν αντίστοιχα.

Α. Να δείξετε ότι $AO = 2\lambda_6$ και $AB = 2\lambda_3$ *(6 Μονάδες)*

Β. Να βρείτε την ακτίνα R του κύκλου *(6 Μονάδες)*

Γ. Να βρείτε τα μήκη των μικρών τόξων ΚΝ και ΛΜ. *(6 Μονάδες)*

Δ. Το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου ΚΛΒ *(7 Μονάδες)*

Απαντήσεις Διαγωνίσματος

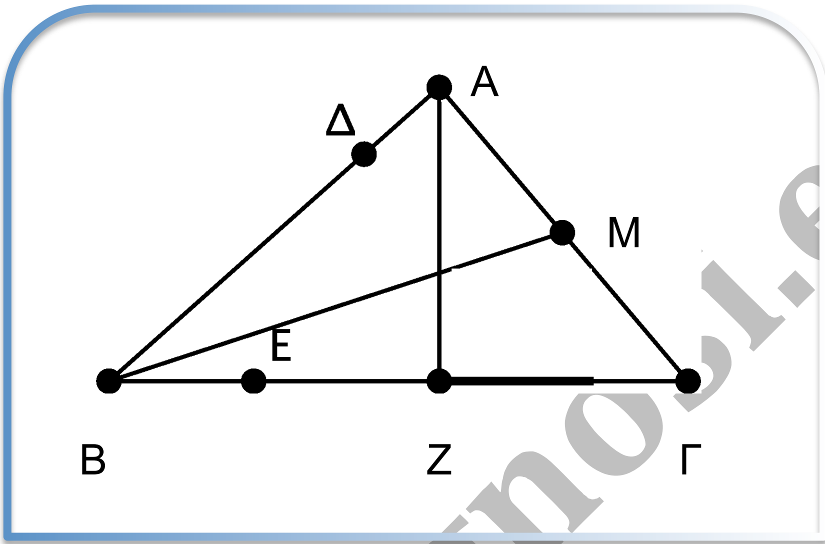
Θέμα 1

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 238

Β. **α.** Λ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Σ **ε.** Λ

στ. Σ **ζ.** Λ **η.** Σ **θ.** Λ **ι.** Σ

Θέμα 2



Α. Από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{B\Gamma}\cdot \sigma\upsilon\nu \mathrm{B} \Leftrightarrow$$
$$\mathrm{A\Gamma}^2 = 12^2 + 16^2 - 2\cdot 12\cdot 16\cdot \sigma\upsilon\nu 60 \Leftrightarrow$$
$$\mathrm{A\Gamma}^2 = 144 + 256 - 384\cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\mathrm{A\Gamma}^2 = 208 \Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma} = \sqrt{208}$$

Β. Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου είναι η ΒΓ.
$\mathrm{B\Gamma}^2=256$ και $\mathrm{AB}^2+\mathrm{A\Gamma}^2=144+208=352$
Αφού $\mathrm{B\Gamma}^2<\mathrm{AB}^2+\mathrm{A\Gamma}^2$ το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

Γ. Από Γ.Π.Θ. οξείας γωνίας έχουμε:

$$\mathrm{A\Gamma}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{B\Gamma}^2-2\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{BZ} \Leftrightarrow 208=144+256-32\cdot\mathrm{BZ} \Leftrightarrow \mathrm{BZ}=\frac{292}{32}$$

Δ. Από το 1^o Θ. Διαμέσων έχουμε:

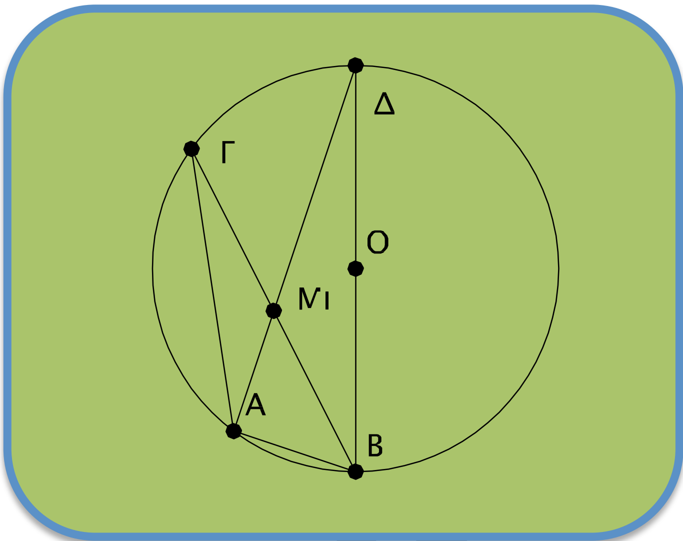
$$\mu_\beta^2 = \frac{2\alpha^2+2\gamma^2-\beta^2}{4} = \frac{512+288-208}{4} = 148 \Leftrightarrow \mu_\beta = \sqrt{148}$$

Ε. $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{B\Gamma}\cdot\eta\mu\mathrm{B} = \frac{1}{2}12\cdot16\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3}$

ΣΤ. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΔ έχουν κοινή γωνία Β άρα:

$$\frac{(\mathrm{BE\Delta})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{\mathrm{B\Delta}\cdot\mathrm{BE}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\frac{2}{3}\mathrm{AB}\cdot\frac{1}{4}\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{B\Gamma}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{(\mathrm{BE\Delta})}{48\sqrt{3}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow (\mathrm{BE\Delta}) = 8\sqrt{3}$$

Θέμα 3



Α. Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου είναι η α.
$\alpha^2 = 8$ και $\beta^2 + \gamma^2 = 1 + 5 = 6$
Αφού $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο με αμβλεία γωνία την Α.

Β. Από το $1^{\text{ο}}$ θεώρημα διαμέσων έχουμε:

$$\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = \frac{12-8}{4} = 1 \Leftrightarrow \mu_\alpha = 1$$

Γ. Από το θεώρημα τεμνουσών έχουμε:

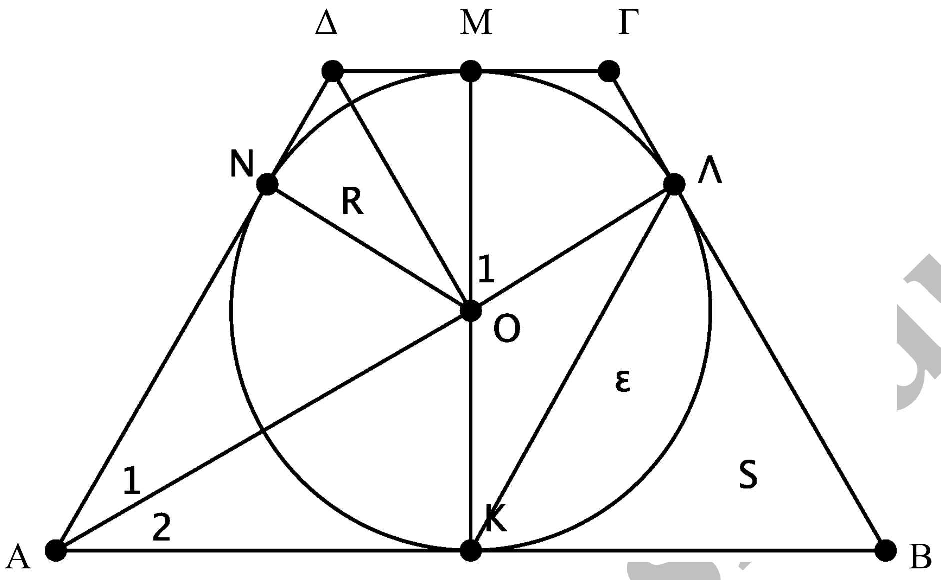
$$\mathrm{AM}\cdot\mathrm{M\Delta} = \mathrm{MB}\cdot\mathrm{M\Gamma} \Leftrightarrow \mathrm{M\Delta} = \frac{\sqrt{8}}{2}\cdot\frac{\sqrt{8}}{2} = 2$$

Δ. Από το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος έχουμε:

$\mathrm{MB}^2 = 2$ και $\mathrm{AM}^2 + \mathrm{AB}^2 = 1 + 1 = 1$

Οπότε $MB^2 = AM^2 + AB^2$, δηλαδή το τρίγωνο ΜΒΑ είναι ορθογώνιο με ορθή την γωνία ΜΑΒ, η οποία είναι εγγεγραμμένη άρα βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα η ΒΔ είναι διάμετρος.

Θέμα 4



Α. Η ΑΟ (διακεντρική ευθεία) είναι διχοτόμος της γωνίας Α, οπότε ισχύει: $A_1 = 30^0 \Leftrightarrow AO = 2\,OK = 2R = 2\lambda_6$

Εφαρμόζοντας το Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΟ ($K = 90^0$), έχουμε:

$$AK^2 = AO^2 - OK^2 \Leftrightarrow AK^2 = 4R^2 - R^2 \Leftrightarrow AK^2 = 3R^2 \Leftrightarrow$$

$$AK = R\sqrt{3} \Leftrightarrow AB = 2R\sqrt{3} \Leftrightarrow AB = 2\lambda_3$$

Β. Οι γωνίες A_1 και O_1 είναι οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες, οπότε:

$A_1 = O_1 = 30^0$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΔ ($M = 90^0$) είναι:

$O_1 = 30^0 \Leftrightarrow O\Delta = 2M\Delta$

Και με εφαρμογή του Π.Θ. έχουμε:

$$O\Delta^2 - M\Delta^2 = MO^2 \Leftrightarrow 3M\Delta^2 = R^2 \Leftrightarrow M\Delta = \frac{R\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

Οπότε:

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta})=\frac{(\mathrm{AB}+\Gamma\Delta)\cdot \mathrm{KM}}{2}\Leftrightarrow 96\sqrt{3}=\frac{\left(2R\sqrt{3}+\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)\cdot 2R}{2}\Leftrightarrow R=6$$

Γ. Το μήκος του μικρού τόξου ΚΝ είναι: $\ell_{\mathrm{KN}}=\frac{\pi\cdot R\cdot 120}{180}=4\pi$

Το μήκος του μικρού τόξου ΛΜ είναι: $\ell_{\Lambda\mathrm{M}}=\frac{\pi\cdot R\cdot 60}{180}=2\pi$

Δ. Είναι: ΒΚ = ΒΛ = R $\sqrt{3}$ = 6 $\sqrt{3}$ και επειδή Β = 60^0, το τρίγωνο ΒΚΛ είναι ισόπλευρο.

Το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου ΚΛΒ είναι:

$$S=(\mathrm{BK\Lambda})-\varepsilon=(\mathrm{BK\Lambda})-\left(\mathrm{O}\overset{\frown}{\mathrm{K}}\Lambda\right)+(\mathrm{OK\Lambda})=$$

$$\frac{\mathrm{KB}^2\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi R^2 120}{360}+\frac{1}{2}R^2\eta\mu 120=27\sqrt{3}-12\pi+9\sqrt{3}=36\sqrt{3}-12\pi$$